Математичні студії
1994, випуск 3

УДК 517.535

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ КРАТНОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ

М.Р. Луцишин, О.Б. Скасків

Abstract. M.R. Lutsyshyn, O.B. Skaskiv. it Asymptotic properties of a multiple Dirichlet series // Matematychni Studii. **3** (1994) 41–48.

The conditions are established under which for an entire function $F(z)$ of several complex variables $z \in BbbC^p$ $(p \geq 2)$, represented by an Dirichlet series, the asymptotic equality $M(x) = (1 + o(1))m(x) = (1 + o(1))\mu(x)$ holds as $|x| \to +\infty$ outside sufficiently small set, where $M(x) = \sup\{|F(x + iy)| : y \in \mathbb{R}^p\}$, $m(x) = \inf\{|F(x + iy)| : y \in \mathbb{R}^p\}$, $\mu(x)$ is the maximal term of the Dirichlet series, and $x \in \mathbb{R}^p$.

Використовуємо стандартні позначення (див. наприклад [1, 2]). Через ^{p} та $\mathbb{R}^p$ позначаємо p-вимірні, відповідно, комплексний та дійсний простори. Модуль вектора $z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^p$ позначаємо $|z| = (|z_1|^2 + \cdots + |z_p|^2)^{1/2}$, а для векторів
$a, b \in \mathbb{C}^p$ позначимо $\langle a, b\rangle \overset{\text{def}}{=} a_1b_1 + \cdots + a_pb_p$. Якщо всі компоненти вектора $n = (n_1, \dots, n_p)$ є цілі невід'ємні, то записуємо $n \in \mathbb{Z}^p_+$. Якщо ж вектори $a, b \in \mathbb{R}^p_+$ (тобто мають невід'ємні дійсні компоненти), то записуємо $a^b = {a_1}^{b_1} \dots {a_p}^{b_p}$ і $\|a\| \overset{\text{def}}{=} a_1 + a_2 + \cdots + a_p, \quad \hat{a} = \max\{a_j : j = \overline{1, p}\}$.

Нехай $A_p(\Lambda)$ – клас цілих функцій $F(z)$, представлених абсолютно збіжними рядами Діріхле

$$F(z) = \sum_{\|n\|=0}^{\infty} a_n e^{\langle z, \lambda_n\rangle} \tag{1}$$

з фіксованою системою показників $\Lambda = \{\lambda_n : n \in \mathbb{Z}^p_+\}$, $\lambda_n = (\lambda^{(1)}_{n_1}, \dots, \lambda^{(p)}_{n_p})$ такою, що $0 \leq \lambda^{(j)}_k \uparrow +\infty$ $(k \uparrow +\infty)$ для кожного $j = 1, 2, \dots, p$.

Для функції $F \in A_p(\Lambda)$ покладемо: $M(x, F) = \sup\{|F(x + it)| : t \in \mathbb{R}^p\}$, $m(x, F) = \inf\{|F(x + it)| : t \in \mathbb{R}^p\}$, $\mu(x, F) = \max\{|a_n|e^{\langle x, \lambda_n\rangle} : n \in \mathbb{Z}^p_+\}$, тут $x + it = (x_1 + it_1, \dots, x_p + it_p)$, $x, t \in \mathbb{R}^p$. Через $\gamma(F) = \{x \in \mathbb{R}^p : \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln \mu(tx, F) = +\infty\}$ позначаємо конус росту максимального члена $\mu(x, F)$ ряду [1].

Нехай, крім того, L – клас додатних неперервних зростаючих до $+\infty$ на $[0; +\infty)$ функцій. Для $\psi_j \in L\,(j = 1, \dots, p)$ та $t = (t_1, \dots, t_p) \in \mathbb{R}^p_+$ позначимо $\psi(t) = (\psi_1(t_1), \dots, \psi_p(t_p))$.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30B50, 30D15.

Через $A_p(\Lambda,\psi)$ позначаємо клас функцій $F\in A_p(\Lambda)$, для яких виконується умова

$$(\exists k_1,k_2>0): |a_n|\le e^{-k_1\langle\lambda_n,\psi(k_2\lambda_n)\rangle}\quad (\|n\|\ge j_0) \tag{2}$$

У випадку цілих рядів Діріхле від однієї змінної ($p=1$) відомі наступні результати.

Теорема А [3]. *Для того, щоб для кожної функції $F\in A_1(\Lambda)$ виконувалися співвідношення*

$$M(x,F)=(1+o(1))\mu(x,F),\quad M(x,F)=(1+o(1))m(x,F) \tag{3}$$

при $x\to+\infty$ $(x\in\mathbb{R}_+\setminus E, \mathrm{mes}_1 E<+\infty)$, *необхідно і досить, щоб*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}<+\infty; \tag{4}$$

тут $\mathrm{mes}_1 E$ – *міра Лебега множини* E *на прямій.*

Для класу $A_1(\Lambda,\psi)$ теорема A в праці [4] уточнюється.

Теорема Б [4]. *Для того щоб для кожної функції $F\in A_1(\Lambda,\psi)$ виконувались співвідношення (3) при $x\to+\infty\,(x\in\mathbb{R}_+\setminus E_0, DE_0=0)$, необхідно і досить, щоб*

$$(\forall\eta>0): \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\psi(\eta\lambda_n)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\lambda_{k+1}-\lambda_k}=0;$$

тут $DE_0=\overline{\lim}_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\mathrm{mes}_1(E_0\cap[0,x])$ – *верхня лінійна щільність множини* E_0 *на промені* R_+.

В замітці [5] одержано аналог теореми А для класу $A_p(\Lambda)$, $p\ge 2$. При цьому співвідношення вигляду (3) виконуються при $|x|\to+\infty$, $(x\in\bar{K}\setminus E)$ для кожного конуса K з вершиною в точці $0=(0,0,\ldots,0)$ такого, що $\overline{K}\setminus\{0\}\subset(\gamma(F)\cap H)$; E - деяка множина з $\mathbb{R}^p$, для міри Лебега mes_p якої виконується

$$\mathrm{mes}_p(E\cap\{x:|x|\le r\})=O(r^{p-1})\quad (r\to+\infty).$$

Множина H є підмножиною тих $x\in\mathbb{R}^p$, що послідовність $\{\langle x,\lambda_n\rangle : a_n\ne 0\}$ допускає упорядкування за неспаданням, тобто $\alpha_j(x)=\langle\lambda_n,x\rangle$ при деякому $n\in\mathbb{Z}_+^p$ та $\alpha_j(x)\le\alpha_{j+1}(x)$ $(j\ge 0)$, і така, що ряд $\sum_{j=j_1}^{\infty}r_j^{-1}$ збіжний, $r_j=\inf\{\alpha_{j+1}(x)-\alpha_j(x): x\in H, |x|=1\}$. При доведенні цього факту використовується модифікація методу з [6], що застосовувалася в [3, 4] до цілих рядів Діріхле ($p=1$).

У цій статті одержуємо інший аналог теореми A для класу $A_p(\Lambda)$, а також аналог теореми Б для класу $A_p(\Lambda,\psi), p\ge 2$. Метод доведення є відмінним від того, що використовувався в статті [3].

II

Лема 1. *Нехай* (λ_k) *– така послідовність, що* $\lambda_k < \lambda_{k+1}$ $(k \geq 0)$. *Визначимо рекурентними співвідношеннями наступні послідовності* $\varkappa_0 = \tau_0 = 0$, $\tau_k = \varkappa_k + \frac{1}{\lambda_k - \lambda_{k-1}}$ $(k \geq 1)$, $\varkappa_{k+1} = \tau_k + \frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k}$ $(k \geq 0)$, $f_0 = 1$, $\ln f_k = \ln f_{k-1} - \varkappa_k(\lambda_k - \lambda_{k-1})$ $(k \geq 1)$. *Тоді*

$$-2 \leq \ln f_k / \sum_{s=1}^{k} \frac{\lambda_k - \lambda_{s-1}}{\lambda_s - \lambda_{s-1}} \leq -1 \quad (\forall k \geq 1), \tag{5}$$

$$\frac{f_k}{f_l} e^{\tau_l(\lambda_k - \lambda_l)} \leq e^{-|k-l|} \quad (\forall k, l \geq 0), \tag{6}$$

$$\max\{f_k e^{\sigma\lambda_k} : k \geq 0\} = f_l e^{\sigma\lambda_l} \quad (\forall \sigma \in [\varkappa_l, \varkappa_{l+1}]). \tag{7}$$

Доведення леми здійснюється безпосередньою перевіркою на основі означення послідовностей $(\tau_n), (\varkappa_n), (f_n)$. Справді,

$$\ln f_k = -\sum_{s=1}^{k} \varkappa_s(\lambda_s - \lambda_{s-1}) \quad (\forall k \geq 1). \tag{8}$$

Тому, наприклад, для $k \geq l + 1$ маємо

$$\ln \frac{f_k}{f_l} + \tau_l(\lambda_k - \lambda_l) = -\sum_{s=l+1}^{k} (\varkappa_s - \tau_l)(\lambda_s - \lambda_{s-1}) \leq$$

$$\leq -\sum_{s=l+1}^{k} (\varkappa_s - \tau_{s-1})(\lambda_s - \lambda_{s-1}) = -\sum_{s=l+1}^{k} \frac{1}{\lambda_s - \lambda_{s-1}}(\lambda_s - \lambda_{s-1}) = -(k - l).$$

Аналогічно показуємо справедливість (6) для $k \leq l - 1$, а також справедливість (7).

Для доведення (5), оскільки

$$\varkappa_k = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_0} + \sum_{s=1}^{k-1} \left(\frac{1}{\lambda_s - \lambda_{s-1}} + \frac{1}{\lambda_{s+1} - \lambda_s}\right) \leq 2 \sum_{s=0}^{k-1} \frac{1}{\lambda_{s+1} - \lambda_s} \quad (\forall k \geq 1),$$

з (8) послідовно маємо

$$\ln f_l \geq -2 \sum_{k=1}^{l} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) \sum_{s=0}^{k-1} \frac{1}{\lambda_{s+1} - \lambda_s} = -2 \sum_{s=0}^{l-1} \frac{\lambda_l - \lambda_s}{\lambda_{s+1} - \lambda_s},$$

а також

$$\ln f_l \leq -\sum_{k=1}^{l} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) \sum_{s=0}^{k-1} \frac{1}{\lambda_{s+1} - \lambda_s} = \sum_{s=0}^{l-1} \frac{\lambda_l - \lambda_s}{\lambda_{s+1} - \lambda_s}.$$

Лема 2. *В умовах леми 1 для* $(k \geq 1)$ *виконуються нерівності*

$$f_{k+1} e^{\sigma\lambda_{k+1}} \geq e^{-1} f_k e^{\sigma\lambda_k} \quad (\text{для} \quad \sigma \geq \tau_k) \tag{9}$$

$$f_{k-1} e^{\sigma\lambda_{k-1}} \geq e^{-1} f_k e^{\sigma\lambda_k} \quad (\text{для} \quad \sigma \leq \tau_k) \tag{10}$$

Для доведення досить повторити викладки, що використовувались при доведенні нерівності (6).

Теорема 1. *Для того, щоб для кожної функції $F \in A_p(\Lambda)$ співвідношення*

$$F(x+it) = (1+o(1))a_{\nu(x)}e^{\langle x+it, \lambda_{\nu(x)}\rangle} \tag{11}$$

виконувалось при $|x| \to +\infty$ ($x \in \mathbb{R}^p \setminus E$) рівномірно по $t \in \mathbb{R}^p$, необхідно і досить, щоб для кожної компоненти послідовності векторів (λ_n) виконувалась умова (4); тут E — множина з $\mathbb{R}^p$ така, що

$$mes_p(E \cap \Pi(r)) = o(r^{p-1}\varphi(r)) \quad (r \to +\infty) \tag{12}$$

$\varphi(r) \in L$ – довільна функція, від якої, взагалі кажучи, залежить множина E, $\Pi(r) = \{x \in \mathbb{R}^p : |x_j| \le r\ (\forall j)\}$ — p-вимірний куб зі стороною $2r$.

Нехай $t \in \mathbb{R}_+^p$ і $\beta(t) = (\ldots, \sum\limits_{\lambda_k^{(j)} \le t_j} \dfrac{1}{\lambda_k^{(j)} - \lambda_{k-1}^{(j)}}, \ldots) \in \mathbb{R}_+^p$.

Теорема 2. *Нехай $F \in A_p(\Lambda, \psi)$. Якщо для кожного $b > 0$ виконується умова,*

$$\|\lambda_n\|\|\beta(\lambda_n)\| = o(\langle \lambda_n, \psi(b\lambda_n)\rangle) \quad (\|n\| \to +\infty), \tag{13}$$

то співвідношення (11) справджується при $|x| \to +\infty$ ($x \in \mathbb{R}^p \setminus E$) рівномірно по $t \in \mathbb{R}^p$, тут E – множина з $\mathbb{R}^p$ така, що $\mathrm{mes}_p(E \cap \Pi(r)) = o(r^p)$ $(r \to +\infty)$.

Доведення достатності в теоремах 1 і 2 проведемо одночасно, відзначаючи тільки відмінності в міркуваннях.

Нехай $(\tau_k^{(j)}), (\varkappa_k^{(j)})$ та $(f_k^{(j)})$ для $j = 1, 2, \ldots, p$ – послідовності з леми 1, побудовані за послідовністю $(\lambda_k^{(j)})$, яка є послідовністю j-тих компонент послідовності векторів $\{\lambda_n = (\ldots, \lambda_k^{(j)}, \ldots)\} = \Lambda$. Для $n = (\ldots, n_j, \ldots) \in \mathbb{Z}_+^p$ позначимо $\tau(n) = (\ldots, \tau_{n_j}^{(j)}, \ldots)$, $f(n) = (\ldots, f_{n_j}^{(j)}, \ldots)$ і для $q \in \mathbb{R}_+^p$ розглянемо допоміжний ряд Діріхле

$$g(\sigma) = \sum_{\|n\|=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{(f(n))^q} e^{\langle \sigma, \lambda_n\rangle}. \tag{14}$$

Покажемо спочатку, що при виконанні умов теорем 1 і 2 ряд (14) збіжний для всіх $\sigma \in \mathbb{R}^p$. Справді, завдяки лівій нерівності з (5) маємо

$$\frac{1}{(f(n))^q} \le \exp\{2\hat{q}\langle \lambda_n, \beta(\lambda_n)\rangle\}, \tag{15}$$

де $\hat{q} = \max\{q_j : q = (q_1, \ldots, q_p)\}$.

А оскільки, за умовою теореми 1, $\sup\limits_n \hat{\beta}(\lambda_n) = \beta < +\infty$, то

$$|a_n|/(f(n))^q \exp\{\langle \sigma, \lambda_n\rangle\} \le |a_n| \exp\{\langle \sigma + 2\beta\hat{q}c_0, \lambda_n\rangle\}, \quad \text{де} \quad c_0 = (1, \ldots, 1).$$

Тому, в умовах теореми 1, $g(\sigma) \in A_p(\Lambda)$. З умови (13) теореми 2 маємо, що

$$(\forall b > 0)\ \langle \lambda_n, \beta(\lambda_n)\rangle = o(\langle \lambda_n, \psi(b\lambda_n)\rangle) \quad (\|n\| \to +\infty). \tag{16}$$

Тому при фіксованому $\sigma \in \mathbb{R}^p$, враховуючи (15) і вибираючи $b = k_2$, одержуємо при $\|n\| \to +\infty$

$$|a_n|/(f(n))^q \exp\{\langle \sigma, \lambda_n\rangle\} = \exp\{-(k_1 + o(1))\langle \lambda_n, \psi(k_2\lambda_n)\rangle\}. \tag{17}$$

Зауважимо тепер, що за нерівністю Коші-Буняковського, для послідовності $m_0 = 0 < m_s < m_{s+1}$ $(s \geq 1)$ маємо

$$\sum_{s=1}^{k} \frac{1}{m_s - m_{s-1}} \geq \frac{(k-1)^2}{m_k},$$

тому, застосовуючи останню нерівність до кожної компоненти вектора $\beta(\lambda_n)$, послідовно виводимо

$$\|\lambda_n\|\|\beta(\lambda_n)\| \geq \|n\| \ \text{ і } \|n\| = o(\langle \lambda_n, \psi(k_2\lambda_n)\rangle) \ (\|n\| \to +\infty).$$

Останнє співвідношення разом з (17) знову дає нам, що $g(\sigma) \in A_p(\Lambda)$.

Позначимо тепер для $\nu \in \mathbb{Z}_+^p$ $E(\nu) = \{\sigma \in \mathbb{R}^P : |a_\nu|/(f(\nu))^q \exp\{\langle \sigma, \lambda_\nu \rangle\} = \mu(\sigma, g)\}$.

Зауважимо, що $\bigcup\limits_{\nu} E(\nu) = \mathbb{R}^p$, а також, що внутрішності множин $E^0(\nu)$ попарно не перетинаються, тобто $E^0(\nu_1) \cap E^0(\nu_2) = \emptyset$ $(\forall \nu_1 \neq \nu_2)$ Легко також перевірити, що $E^0(\nu)$ – опуклий многогранник, або $E^0(\nu) = \emptyset$. Якщо $\sigma \in E(\nu)$, то безпосередньо з означення $\mu(\sigma, g)$ для $x = \sigma + \langle q, \tau_{(\nu)} \rangle c_0$ $(c_0 = (1, 1, \ldots, 1))$, використовуючи p разів нерівність (6) з леми 1, для всіх $n \in \mathbb{Z}_+^p$ маємо

$$\frac{|a_n|}{|a_\nu|} e^{\langle x, \lambda_n - \lambda_\nu \rangle} \leq \exp\{-(q_1|n_1 - \nu_1| + \cdots + q_p|n_p - \nu_p|)\} \tag{18}$$

Якщо $\min\{q_j : q = (q_1, \ldots, q_p)\} > 0$, то з (18), зокрема, для всіх $x \in E_1^0(\nu)$ ($E_1^0(\nu)$ – образ множини $E^0(\nu)$ при відображенні $x = \sigma + \langle q, \tau_{(\nu)} \rangle c_0$) одержуємо

$$\mu(x, F) = |a_\nu| e^{\langle x, \lambda_\nu \rangle} > |a_n| e^{\langle x, \lambda_n \rangle} \ (\forall n \neq \nu),$$

тобто для кожного $x \in \bigcup \nu E_1^0(\nu)$ існує єдиний максимальний член ряду (1). Для всіх $x \in E_2(q) \ \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup E_1(\nu)$ (об'єднання береться по всіх мультиіндексах ν) тому маємо

$$S_\nu(x) \ \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \neq \nu} |a_n| e^{\langle x, \lambda_n \rangle} / \mu(x, F) \leq \sum_{n \neq \nu} e^{-(q_1|n_1 - \nu_1| + \cdots + q_p|n_p - \nu_p|)} \ \stackrel{\text{def}}{=} C(q).$$

Зауважимо, що $C(q) \to 0$ $(q_1 \to +\infty, \ldots, q_p \to +\infty)$.

Нехай $I(F, G) = \{\nu \in \mathbb{Z}_+^p : (\exists x \in G)(\mu(x, F) = |a_\nu| e^{\langle x, \lambda_\nu \rangle})\}$. Для $1 \leq k \leq p$ і $r > 0$ позначимо $\theta_k = \theta_k(r) = \max\{\nu_k : \nu = (\nu_1, \ldots, \nu_k, \ldots, \nu_p) \in I(F, \Pi_k(r))\}$, $\theta(r) = (\ldots, \theta_k(r), \ldots) \in \mathbb{Z}_+^p$, де $\Pi_k(r) = \{x = (x_1, \ldots, x_p) \in \Pi(r) : x_k = r\}$ і розглянемо множину

$$G_1(r) = \{\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_p) \in \mathbb{R}^p : -r - q_j \tau_{\theta_j}^{(j)} \leq \sigma_j \leq r - q_j \tau_{\theta_j}^{(j)}\} \ (\forall j = \overline{1, p})\}.$$

Оскільки образ куба $G_1(r)$ при кусково-лінійному відображенні $x = \sigma + \langle q, \tau(\nu) \rangle c_0$ лежить повністю в $G_2(r) = \{x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p : -r - q_j \tau_{\theta_j}^{(j)} \leq x_j \leq r \ (\forall j)\}$, то для множини $\tilde{E}(q) = \mathbb{R}^p \setminus E_2(q)$ маємо $\mathrm{mes}_p(\Pi(r) \cap \tilde{E}(q)) = \mathrm{mes}_p(\Pi(r) \setminus E_2(q)) \leq$

$\mathrm{mes}_p(G_2(r) \setminus E_2(q))$. З іншого боку, $\mathrm{mes}_p(E_2(q) \cap G_2(r)) \geq \mathrm{mes}_p(G_1(r)) = (2r)^p$. Тому

$$\mathrm{mes}_p(\Pi(r) \cap \tilde{E}(q)) \leq \mathrm{mes}_p(G_2(r)) - \mathrm{mes}_p(G_1(r)) = \prod_{j=1}^{p}(2r + \tau_{\theta_j}^{(j)} q_j) - (2r)^p.$$

Звідси, в умовах теореми 1, оскільки $\hat{\tau}_{(\theta(r))} \leq 2B$, маємо $\mathrm{mes}_p(\Pi(r) \cap \tilde{E}(q)) \leq \sum_{k=1}^{p} C_p^k (2r)^{p-k}(2B\hat{q})^k$; тут $C_p^k = \frac{p!}{(p-k)!k!}$.

Звідси для кожної функції $\varphi(r) \uparrow +\infty$ $(r \to +\infty)$ і для довільного $\eta > 0$

$$\mathrm{mes}_p(\Pi(r) \cap \tilde{E}(q)) < r^{p-1}(2 + 2B\hat{q})^p \leq \eta r^{p-1}\sqrt{\varphi(r)} \quad (\forall r \geq r_0(q, \eta)).$$

Нехай тепер $q = q^{(k)} = (k, \dots, k)$, $\eta = \eta_k = k^{-2}$ і $r_k = \max\{r_0(q^{(k)}, \eta_k), r_{k-1}\}$ $(k \geq 2)$, $r_1 = r_0(q^{(1)}, \eta_1)$. Також для $x \in \Pi(r_{k+1}) \setminus \Pi(r_k)$ позначимо $\epsilon(x) = C(q^{(k)})$, а для $r \in (r_k, r_{k+1}]$ $\eta(r) = \eta_k$. Зрозуміло, що $\epsilon(x) \to 0$, $\eta(x) \to 0$, $(|x| \to +\infty)$. Тоді для всіх

$$x \notin E = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{\tilde{E}(q^{(k)}) \cap (\Pi(r_{k+1}) \setminus \Pi(r_k))\} \quad S_\nu(x) \leq \epsilon(x)$$

і, отже, співвідношення (11) виконується при $|x| \to +\infty$ $(x \notin E)$ рівномірно по $t \in \mathbb{R}^p$.

Для завершення доведення достатності в теоремі 1 залишилося показати, що виконується (12). Справді, якщо $m = \max\{k : r_k < r\}$, то

$$\begin{aligned}&\mathrm{mes}_p(E \cap \Pi(r)) = \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \mathrm{mes}_p\{\tilde{E}(q^{(k)}) \cap (\Pi(r_{k+1}) \setminus \Pi(r_k))\} + \mathrm{mes}_p\{\tilde{E}(q^{(m)}) \cap (\Pi(r) \setminus \Pi(r_m))\} \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{m-1} \mathrm{mes}_p\{\tilde{E}(q^{(m)}) \cap \Pi(r_{k+1})\} + \mathrm{mes}_p\{\tilde{E}(q^{(m)}) \cap \Pi(r)\}.\end{aligned}$$

Звідси, якщо зауважити, що для $r \in (r_k, r_{k+1}]$, $\mathrm{mes}_p\{\tilde{E}(q^{(k)}) \cap \Pi(r)\} \leq r^{p-1}\eta(r)\sqrt{\varphi(r)}$, одержуємо

$$\mathrm{mes}_p(E \cap \Pi(r))) \leq \sum_{k=1}^{m-1} r_{k+1}^{p-1}\eta(r_{k+1})\sqrt{\varphi(r_{k+1})} + r^{p-1}\eta(r)\sqrt{\varphi(r)},$$

тому

$$\frac{1}{r^{p-1}\varphi(r)} \mathrm{mes}_p(E \cap \Pi(r)) \leq \frac{1}{\sqrt{\varphi(r)}} \sum_{k=1}^{m} k^{-2} = o(1)\ (r \to +\infty),$$

що й треба було довести.

Для завершення доведення теореми 2 зауважимо, що, як і при доведенні достатності в теоремі 1, одержуємо

$$\mathrm{mes}_p(\Pi(r) \cap \tilde{E}(q)) \leq \sum_{k=1}^{p} C_p^k (2r)^{p-k}(\hat{\tau}(\theta(r))\hat{q})^k.$$

Оскільки, зокрема, $\ln\mu(x,F) \geq 0\,(|x| \to +\infty, x \in \gamma(F))$, то, враховуючи, що $F \in A_p(\Lambda,\psi)$, одержуємо

$$\frac{\hat{\tau}(\theta(r))}{r} \leq o(\frac{\|\beta(\lambda_{\tilde{\nu}})\|\,\|\lambda_{\tilde{\nu}})\|}{\langle\lambda_{\tilde{\nu}},\beta(\lambda_{\tilde{\nu}})\rangle}) = o(1)\,(r \to +\infty),$$

де $\hat{\tau}_{\theta(r)} = \tau^{(j)}_{\theta_j(r)}, \tilde{\nu} = (\nu_1,\dots,\nu_{j-1},\theta_j(r),\nu_{j+1},\dots,\nu_p)$. Звідси $\text{mes}\,_p(\Pi(r)\cap\tilde{E}(q)) = o(r^p)$ $(r \to +\infty)$. При цьому ми, як і вище, врахували, що $\theta_j(r)\,(\forall j)$ неспадна функція від $r \geq 0$. Подальше доведення завершується подібно як і вище.

Доведемо необхідність в теоремі 1. Для простоти припустимо, що $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda^{(1)}_{k+1}-\lambda^{(1)}_k} = +\infty$. Тоді для доведення досить розглянути функцію $F(x) = f(x_1) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(1)}_k e^{x_1\lambda^{(1)}_k}$. Із (9) і (10) маємо, що $\forall x \in \mathbb{R}^p$

$$F(x) \geq e^{-1}\mu(x,F), \tag{19}$$

тому твердження теореми 1 не може виконуватися навіть на деякій послідовності значень $x \in \mathbb{R}^p$, $|x| \to +\infty$. З іншого боку, враховуючи (5), легко показати, що $F \in A_p(\Lambda)$.

Теореми 1 і 2 повністю доведені.

Зауваження. Умови теореми 2 також, взагалі кажучи, близькі до непокращуваних. Для цього у випадку, коли не виконується умова

$$(\forall b > 0):\ \underline{\lim}_{\|t\|\to+\infty}\frac{\langle t,\beta(t)\rangle}{\langle t,\psi(bt)\rangle} = 0, \tag{20}$$

досить розглянути функцію $F_q(x) = \displaystyle\sum_{\|n\|=0}^{\infty} f^q_n e^{\langle x,\lambda_n\rangle}$. Безпосередньо на основі заперечення умови (20) і нерівності (5) показується, що $F \in A_p(\Lambda,\psi)$, а на основі (9),(10) показуємо, що справедлива $(\forall x \in \mathbb{R}^p)$ нерівність (19).

В загальному випадку, якщо не виконується умова

$$(\forall b > 0):\ \lim_{\|t\|\to+\infty}\frac{\langle t,\beta(t)\rangle}{\langle t,\psi(bt)\rangle} = 0, \tag{21}$$

слід використати конструкцію з [4]. Звідси, враховуючи, що у випадку $\psi_j(\tau) = \psi(\tau)\,(\forall j), \tau \in \mathbb{R}_+$, умови (13) і (21) еквівалентні, зокрема, маємо, що, взагалі кажучи, умови теореми 2 є непокращувані.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ронкин Л.И. Введение в теорию целых функций многих переменных. М.: Наука, 1971. – 432с.
2. Стрелиц Ш.И. Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений. – Вильнюс: Минтис, 1972. – 468с.
3. Скасків О.Б. Максимум модуля і максимальний член цілого ряду Діріхле // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1984. № 11. С.22–24.

4. Скаскив О.Б., Шеремета М.М. Об асимптотическом поведении целых рядов Дирихле // Исследования по комплексному анализу: Сб. статей. Уфа: БФАН СССР, 1987. С.206–217.

5. Скасків О.Б., Луцишин М.Р. Про мінімум модуля кратного ряду Діріхле // Укр. матем. журнал. 1992. Т.44, № 9. С.1295–1297.

6. Fenton P.C. The minimum modulus of gap power series // Proc. Edinburgh Math. Soc.(2). 1978/79. V.21. P.49–54.

Department of Mechanics and Mathematics, Lviv University, Universytetska 1, Lviv, 290602, Ukraine

Надійшло 20.01.1994