Математичні студії
1994, випуск 3

УДК 512.536

ФИЛЬТРЫ И ТОПОЛОГИИ НА ПОЛУГРУППАХ

И.В. Протасов

Abstract. I.V. Protasov, *Filters and topologies on semigroups* // Matematychni Studii. **3** (1994) 15–28.

It is proposed an approach to the classification of filters on semigroups based on semigroup properties of Čech-Stone compactifications.

.

Хорошо известно, что любая топология на группе G, в которой непрерывны операции умножения и обращения, однозначно определяется фильтром φ окрестностей единицы. В свою очередь фильтр φ выделяет замкнутое подмножество $\bar{\varphi} = \{p \in \beta G : \varphi \subseteq p\}$ в пространстве ультрафильтров βG – чехстоуновой компактификации группы G как дискретного пространства. Конструкция, возникшая в комбинаторике чисел, позволяет продолжить операцию умножения на группе G до полугрупповой операции на βG, причём подмножество $\bar{\varphi}$ оказывается замкнутой подполугруппой в βG. Как показано в работе [1], подполугруппа $\bar{\varphi}G$ – достаточно мощный инструмент исследования тополого-алгебраических свойств группы, связанных с разбиениями и некоторыми кардинальными инвариантами.

Цель статьи – развить подход из работы [1] в направлении тополого-алгебраической классификации фильтров на полугруппах. В основу такой классификации положено описаное выше соответствие между фильтрами φ на полугруппе S и замкнутыми подмножествами $\bar{\varphi}$ полугруппы βS.

Кратко о содержании работы. В §1 введено понятие замыкания подмножества полугруппы по направлению фильтра и указаны элементарные его свойства.

Основной объкт исследований – полугрупповые фильтры – введены §2 после детального описания продолжения операции полугруппы на чех-стоунову компактификацию. Фильтр φ на полугруппе S называется полугрупповым, если $\bar{\varphi}$ – подполугруппа полугруппы βS.

В §3 и §4 приведены различные характеризации правотопологических фильтров на полугруппах с единицей. Одна из этих характеризаций состоит в том, что правотопологические фильтры – это в точности фильтры окрестностей единицы полугруппы, снабженной топологией, в которой непрерывны и открыты правые сдвиги. Доказано, что всякий правотопологический фильтр

1991 *Mathematics Subject Classification.* 22A15.

полугрупповой и построен пример полугруппового фильтра, который не является правотопологическим.

Свойства отделимости топологий на группах и полугруппах, порожденных свободными ультрафильтрами, изучены в §5. Доказано, что регулярность топологии на группе G, порождённой идемпотентом из $\beta G\backslash G$, – крайне редкое явление, связанное с разрешимостью некоторых уравнений в полугруппе $\underset{\sim}{G}$. Указан способ регуляризации таких топологий.

С точки зрения топологических групп и полугрупп наибольший интерес представляют мультипликативные фильтры, определенне в §6. В §7 приведено, в частности, доказательство следуещего утверждения, анонсированного в [2]. Существование топологической группы, в которой сходится к единице лишь один свободный ультрафильтр, не зависит от системы аксиом ZFC теории множеств.

По ходу изложения отмечено несколько нерешённых вопросов.

§1. .

Пусть φ – фильтр на полугруппе S. *Замыканием подмножества* $A \subseteq S$ *по направлению фильтра* φ назовём подмножество $cl(A,\varphi) = \{x \in S : Fx \cap A \neq \varnothing$ для любого $F \in \varphi\}$.

Внутренностью подмножества $A \subseteq S$ *по направлению фильтра* φ назовём подмножество $int(A,\varphi) = \{x \in S : Fx \subseteq A$ для некоторого $F \in \varphi\}$.

Рассмотрим чех-стоунову компактификацию βS полугруппы S как дискретного пространства. Элементами пространства βS являются ультрафитры на полугруппе S, а базу топологии образуют множества $\bar{A} = \{p \in \beta S : A \in p\}$, где A пробегает все подмножества полугруппы S. Отметим, что подмножество $\bar{A}$ открыто и замкнуто в пространстве βS для любого подмножества $A \subseteq S$. Условимся полугруппу S отождествлять с подмножеством всех главных ультрафильтров из βS. Ультрафильтры из подмножества $\beta S\backslash S$ называются свободными.

Для фильтра φ на полугруппе S обозначим через $\bar{\varphi}$ совокупность всех ультрафильтров на S, содержащих φ. Поскольку $\bar{\varphi} = \cap\{\bar{F} : F \in \varphi\}$, то $\bar{\varphi}$ – замкнутое подпространство пространства βS. Более того, всякое замкнутое подпространство из βS имеет вид $\bar{\varphi}$ для подходящего фильтра φ.

Фильтр φ на полугруппе S с единицей e назовём *центрированным*, если $e \in F$ для любого $F \in \varphi$.

Следующие простые утверждения вытекают непосредственно из приведённых определений.

1.1 $cl(A \cup B,\varphi) = cl(A,\varphi) \cup cl(B,\varphi)$ для любых подмножеств A, B и фильтра φ на S.
1.2 $A \subseteq cl(A,\varphi)$ для любых подмножества $A \subseteq S$ и центрированого фильтра φ на S.
1.3 $cl(\varnothing,\varphi) = \varnothing$ для любого фильтра φ на S.
1.4 $cl(S\backslash A, p) = S\backslash cl(A, p)$ для любых подмножества $A \subseteq S$ и ультрафильтра p на S.
1.5 $cl(A,\varphi) = \cup\{cl(A,p) : p \in \bar{\varphi}\}$ для любых подмножества $A \subseteq S$ и фильтра φ на S.
1.6 $int(A,\varphi) \subseteq A$ для любых подмножества $A \subseteq S$ и центрированого фильтра φ на S.

1.7 $int(A,p) = cl(A,p)$ для любых подмножества $A \subseteq S$ и ультрафильтра p на S.

1.8 $int(A,\varphi) = \cap\{int(A,p) : p \in \bar{\varphi}\}$ для любых подмножества $A \subseteq S$ и фильтра φ на S.

Пусть S – полугруппа с единицей, φ – центрированный фильтр на S. Обозначим через $Exp\, S$ семейство всех подмножеств полугруппы S и определим отображение $Cl_\varphi : Exp\, S \to Exp\, S$ правилом $Cl_\varphi(A) = cl(A,\varphi)$ для любого подмножества $A \subseteq S$. Для того, чтобы отображение Cl_φ было ***оператором замыкания*** (см. [3, стр.44]) необходимо и достаточно, с учётом свойств 1.1–1.3, выполнение условия: $cl(cl(A,\varphi),\varphi) = cl(A,\varphi)$ для любого подмножества $A \subseteq S$. Фильтры φ, для которых Cl_φ – оператор замыкания, описаны в §3. Для того, чтобы изложить это описание, нам понадобится полугрупповая структура на пространстве βS.

§2. .

Изложим конструкцию продолжения на βS операции умножения полугруппы S. Такая конструкция возникла и интенсивно используется в комбинаторике чисел (см., например, [4]).

Для каждого элемента $a \in S$ определим отображение $R_a : S \to S$ правилом $R_a(x) = xa$ для всех $x \in S$. Так как $S \subseteq \beta S$, то отображение R_a продолжается до непрерывного отображения $\bar{R}_a : \beta S \to \beta S$. Ясно, что для каждого ультрафильтра $p \in \beta S$ $\bar{R}_a(p)$ – ультрафильтр с базисом $\{Pa : P \in p\}$. Таким образом, мы определили произведение $pa = \bar{R}_a(p)$ ультрафильтра $p \in \beta S$ и элемента $a \in S$. Далее, для каждого ультрафильтра $p \in \beta S$ рассмотрим отображение $L_p : S \to \beta S$, заданное правилом $L_p(x) = px$ для всех $x \in S$. Продолжим отображение L_p до непрерывного отображения $\bar{L}_p : \beta S \to \beta S$. Если $q \in \beta S$, то ультрафильтр $\bar{L}_p(q)$ называется произведением ультрафильтров p и q и обозначается pq.

Определённая таким образом операция на bS ассоциативна, непрерывна по второму аргументу при фиксированном первом, а также непрерывна по первому аргументу, если фиксированный второй аргумент является главным ультрафильтром.

Полезно следуещее "конструктивное" описание ультрафильтра pq. Возьмём произвольное подмножества $Q \in q$ и для каждого элемента $x \in Q$ выберем подмножество $P_x \in p$. Подмножество $\cup\{P_x x : x \in Q\}$ является элементом ультрафильтра pq и каждый элемент ультрафильтра pq содержит подмножество такого вида. Следовательно, для подмножества $A \subseteq S$

$$A \in pq \iff cl(A,p) \in q.$$

Фильтр φ на полугруппе S назовём *полугрупповым*, если $\bar{\varphi}$ – подполугруппа полугруппы βS. В следующем параграфе мы покажем, что если Cl_φ – оператор замыкания, то φ – полугрупповой фильтр.

2.1. Теорема. *Фильтр φ полугрупповой тогда и только тогда, когда $cl(\mathcal{U},p) \in \varphi$ для любых $\mathcal{U} \in \varphi$, $p \in \bar{\varphi}$.*

Доказательство. Пусть φ – полугрупповой фильтр, однако $cl(\mathcal{U},p) \notin \varphi$ для некоторых $\mathcal{U} \in \varphi$, $p \in \bar{\varphi}$. Возьмём такой ультрафильтр $q \in \bar{\varphi}$, что $cl(\mathcal{U},p) \notin q$.

По определению операции умножения ультрафильтров, $\mathcal{U} \notin pq$. Наступило противоречие с тем, что $pq \in \bar{\varphi}$, $\mathcal{U} \in \varphi$.

Допустим, что $cl(\mathcal{U}, p) \in \varphi$ для любых $\mathcal{U} \in \varphi$, $p \in \bar{\varphi}$. Предположим, что существуют такие ультрафильтры $r, q \in \bar{\varphi}$, что $rq \notin \bar{\varphi}$. Возьмём такое подмножество $\mathcal{V} \in \varphi$, что $\mathcal{V} \notin rq$. Тогда $cl(\mathcal{V}, r) \notin q$, в противоречии с тем, что $cl(\mathcal{V}, r) \in \varphi$ и $q \in \bar{\varphi}$.

§3. .

Пусть S – полугруппа с единицей e. Центрированный фильтр φ на S назовём *правотопологическим*, если $int(\mathcal{U}, \varphi) \in \varphi$ для любого $\mathcal{U} \in \varphi$. Из теоремы 2.1 и утверждений 1.7, 1.8 вытекает, что любой правотопологический фильтр явлется полугрупповым. Следующие примеры 3.1, 3.2 и теорема 3.7 дают достаточное обоснование этого определения.

3.1. Пример. Пусть x – фиксированння точка топологического пространства X, S – некоторая полугруппа непрерывных в точке x отображений пространства X, содержащая тождественное отображение. Значение отображения $s \in S$ в точке $y \in X$ обозначим $(y)s$. Рассмотрим фильтр Φ окрестностей точки x и для каждого подмножества $\mathcal{U} \in \Phi$ положим $[\mathcal{U}] = \{s \in S : (x)s \in \mathcal{U}\}$. Ясно, что семейство подмножеств $\{[\mathcal{U}] : \mathcal{U} \in \Phi\}$ – базис некоторого однозначно определённого центрированного фильтра φ на полугруппе S. Далее мы покажем, что φ – правотопологический фильтр и, следовательно, $\bar{\varphi}$ – подполугруппа полугруппы βS. Поскольку $\bar{\varphi}$ содержит стабилизатор точки x в полугруппе S, то подполугруппу $\bar{\varphi}$ естественно назвать *ультрастабилизатором* точки x.

Пусть $\mathcal{U}$ – произвольная окрестность точки x. Выберем открытую окрестность точки x так, что $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. Фиксируем произвольное отображение $s \in [\mathcal{V}]$ и, пользуясь непрерывностью s в точке x, подберём такую окрестность $\mathcal{W}$ точки x, что $(\mathcal{W})s \subseteq V$. Тогда $(x)ts \in \mathcal{V}$ для любого отображения $t \in [\mathcal{W}]$. Значит, $[\mathcal{W}]s \subseteq [\mathcal{V}]$ и по определению внутренности относительно фильтра, $[\mathcal{V}] \subseteq int([\mathcal{V}], \varphi)$. Так как $[\mathcal{V}] \in \varphi$, то $int([\mathcal{V}], \varphi) \in \varphi$. Поскольку $int([\mathcal{V}], \varphi) \subseteq int([\mathcal{U}], \varphi)$, то $int([\mathcal{U}], \varphi) \in \varphi$, т.е. φ – правотопологический фильтр.

3.2. Пример. Пусть полугруппа S с единицей e снабжена некоторой топологией, причём операция умножения непрерывна по первому аргументу в каждой точке $(e, s) \in S \times S$. Иначе говоря, все сдвиги на элементы полугруппы непрерывны в точке e. Из примера 3.1 следует, что фильтр окрестностей точки e правотопологический.

3.3. Пример. Центрированный полугрупповой фильтр φ правотопологический, если полугруппа $\bar{\varphi}$ конечна. Действительно, пусть $\bar{\varphi} = \{p_1, \dots, p_n\}$, $\mathcal{U} \in \varphi$. По теореме 2.1, $cl(\mathcal{U}, p_1) \in \varphi, \dots, cl(\mathcal{U}, p_n) \in \varphi$. Значит, $\cap\{cl(\mathcal{U}, p) : p \in \bar{\varphi}\} \in \varphi$ и осталось воспользоваться утверждениями 1.7, 1.8.

Пример центрированного полугруппового фильтра, который не является правотопологическим, будет построен в §4.

3.4. Теорема. *Центрированный фильтр φ на полугруппе S является правотопологическим тогда и только тогда, когда Cl_{φ} – оператор замыкания.*

Доказательство. Пусть φ – правотопологический фильтр, $A \subseteq S$. Покажем, что $cl(cl(A, \varphi), \varphi) \subseteq cl(A, \varphi)$. Возьмём произвольные элемент $x \in cl(cl(A, \varphi), \varphi)$

и подмножество $\mathcal{U} \in \varphi$. Положим $\mathcal{V} = int(\mathcal{U}, \varphi)$. Так как фильтр φ правотопологический, то $\mathcal{V} \in \varphi$. Выберем ультрафильтр $q \in \bar{\varphi}$ так, что $x \in cl(cl(A, \varphi), q)$. Найдём такое подмножество $Q \in q$, что $Q \subseteq \mathcal{V}$, $Qx \subseteq cl(A, \varphi)$. Фиксируем произвольный элемент $y \in Q$. Так как $yx \in cl(A, \varphi)$, то существует такой ультрафильтр $p \in \bar{\varphi}$, что $Pyx \subseteq A$ для некоторого подмножества $P \in p$. Поскольку $y \in \mathcal{V}$ и $\mathcal{V} = int(\mathcal{U}\varphi)$, то найдётся такое подмножество $P_1 \in p$, что $P_1 y \subseteq \mathcal{U}$, $P_1 \subseteq P$. Значит, $P_1 yx \subseteq A$ и, следовательно, $\mathcal{U}x \cap A \neq \varnothing$. Так как последнее соотношение выполняется для любого подмножества $\mathcal{U} \in \varphi$, то $x \in cl(A, \varphi)$.

Пусть Cl_φ – оператор замыкания, однако, вопреки утверждению теоремы, фильтр φ не является правотопологическим. Значит, найдётся такое подмножество $\mathcal{U} \in \varphi$, что $int(\mathcal{U}, \varphi) \notin \varphi$. Выберем такой ультрафильтр $q \in \bar{\varphi}$, что $int(\mathcal{U}, \varphi) \notin q$. Положим $Q = S \backslash int(\mathcal{U}, \varphi)$ и заметим, что $Q \in q$. Пользуясь утверждениями 1.7, 1.8, для каждого элемента $x \in Q$ выберем такой ультрафильтр $p_x \in \bar{\varphi}$, что $x \notin cl(\mathcal{U}, p_x)$. По утверждению 1.4, $x \in cl(S \backslash \mathcal{U}, p_x)$ и, следовательно, $x \in cl(S \backslash \mathcal{U}, \varphi)$. Итак, мы доказали, что $Q = Qe \subseteq cl(S \backslash \mathcal{U}\, p)$. Так как $Q \in q$ и $q \in \bar{\varphi}$, то $e \in cl(cl(S \backslash \mathcal{U}, \varphi), \varphi)$. Поскольку Cl_φ – оператор замыкания, заключаем $e \in cl(S \backslash \mathcal{U}, \varphi)$. Однако, $\mathcal{U}e \cap (S \backslash \mathcal{U}) = \varnothing$ и $\mathcal{U} \in \varphi$, что противоречит определению замыкания по направлению фильтра. Теорема доказана.

Пусть φ – правотопологический фильтр на полугруппе S. Введём топологию на полугруппе S, объявляя подмножество $F \subseteq S$ замкнутым тогда и только тогда, когда $cl(F, \varphi) = F$. Корректность этого определения гарантируется теоремой 3.4. Полученную топологию назовём порождённой фильтром φ и обозначим $\langle\varphi\rangle$. Для фильтра φ и элемента $x \in S$ обозначим через φx фильтр на S с базисом $\{\mathcal{U}x : \mathcal{U} \in \varphi\}$.

3.5. Лемма. *Подмножество $\mathcal{U} \in S$ открыто в топологии $\langle\varphi\rangle$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{U} = int(\mathcal{U}, \varphi)$.*

Доказательство. Пусть подмножество $\mathcal{U}$ открыто в топологии $\langle\varphi\rangle$. По утверждению 1.6, $int(\mathcal{U},\varphi) \subseteq \mathcal{U}$, поэтому достаточно доказать включение $\mathcal{U} \subseteq int(\mathcal{U}, \varphi)$. Так как подмножество $S \backslash \mathcal{U}$ замкнуто, то $S \backslash \mathcal{U} = cl(S \backslash \mathcal{U}, \varphi)$. Подберём такое подмножество $\mathcal{V} \in \varphi$, что $\mathcal{V}x \cap (S \backslash \mathcal{U}) = \varnothing$. Тогда $\mathcal{V}x \subseteq \mathcal{U}$ и, по определению, $x \in int(\mathcal{U}, \varphi)$.

Предположим, что $\mathcal{U} = int(\mathcal{U}, \varphi)$ и докажем замкнутость подмножества $S \backslash \mathcal{U}$ в топологии $\langle\varphi\rangle$. По утверждению 1.2, $S \backslash \mathcal{U} \subseteq cl(S \backslash \mathcal{U}, \varphi)$, поэтому достаточно проверить включение $cl(S \backslash \mathcal{U}, \varphi) \subseteq S \backslash \mathcal{U}$. Если $x \in cl(S \backslash \mathcal{U}, \varphi)$, то $x \in cl(S \backslash \mathcal{U}, p)$ для некоторого ультрафильтра $p \in \bar{\varphi}$. По утверждению 1.4, $x \notin cl(\mathcal{U}, p)$. По утверждениям 1.7, 1.8, $x \notin int(\mathcal{U}, \varphi)$. Так как $int(\mathcal{U}, \varphi) = \mathcal{U}$, то $x \in S \backslash \mathcal{U}$.

3.6 Лемма. *Если φ_x – фильтр окрестностей точки $x \in S$ в топологии $\langle\varphi\rangle$, то $\varphi_x = \varphi x$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{U}$ – открытое множество в топологии $\langle\varphi\rangle$ и $x \in \mathcal{U}$. По лемме 3.5, $\mathcal{U} = int(\mathcal{U}, \varphi)$, следовательно, найдётся такое подмножество $\mathcal{V} \in \varphi$, что $\mathcal{V}x \subseteq \mathcal{U}$, т.е. $\mathcal{U} \in \varphi x$.

Предположим, что подмножество $\mathcal{U}x$ не является окрестностью точки x в топологии $\langle\varphi\rangle$ для некоторого подмножества $\mathcal{U} \in \varphi$. Тогда $x \in cl(S \backslash \mathcal{U}x, \varphi)$. Однако $\mathcal{U}x \cap (S \backslash \mathcal{U}x) = \varnothing$, что противоречит определению замыкания по направлению фильтра.

Из леммы 3.6 непосредственно вытекает следующая теорема

3.7. Теорема. *Если φ – правотопологический фильтр на полугруппе S, то правые сдвиги на элементы полугруппы непрерывны и открыты в топологии $\langle\varphi\rangle$.*

Предположим, что полугруппа S с единицей снабжена некоторой топологией τ, причём все правые сдвиги непрерывны и открыты. Пример 3.2 показывает, что фильтр φ окрестностей единицы в топологии τ является правотопологическим. Так как правые сдвиги непрерывны и открыты, для любой точки $x \in S$ φx – фильтр окрестностей точки x в топологии τ. По лемме 3.6 топология τ совпадает с топологией $\langle\varphi\rangle$. Итак, всякая топология на полугруппе с единицей, относительно которой непрерывны и открыты правые сдвиги, порождается некоторым правотопологическим фильтром. Если в топологии τ правые сдвиги непрерывны, но не обязательно открыты, то топология $\langle\varphi\rangle$ содержится в топологии τ, а фильтры окрестностей единицы в этих топологиях совпадают.

В следующем параграфе мы используем следующий технический критерий правотопологичности фильтра.

3.8. Теорема. *Центрированный фильтр φ на полугруппе S является правотопологическим тогда и только тогда, когда для любого подмножества $\mathcal{U} \in \varphi$ найдётся такое подмножество $\mathcal{V} \in \varphi$, что $p\bar{\mathcal{V}} \subseteq \bar{\mathcal{U}}$ для всех $p \in \bar{\varphi}$.*

Доказательство. Пусть φ – правотопологический фильтр,$\mathcal{U}\in\varphi$, $\mathcal{V} = int(\mathcal{U},\varphi)$, $\mathcal{V} \in \varphi$. Фиксируем ультрафильтр $p \in \bar{\varphi}$ и для каждого элемента $x \in \mathcal{V}$ выберем такое подмножество $P_x \in p$, что $P_x x \subseteq \mathcal{U}$. Если теперь q – произвольный ультрафильтр из $\bar{\mathcal{V}}$, то $\mathcal{V} \in q$ и, по определению операции умножения ультрафильтров, $\mathcal{U} \in pq$, т.е. $pq \in \bar{\mathcal{U}}$.

Наоборот, для подмножества $\mathcal{U} \in \varphi$ выберем такое подмножество $\mathcal{V} \in \varphi$, что $p\bar{\mathcal{V}} \subseteq \bar{\mathcal{U}}$ для всех $p \in \bar{\varphi}$. В частности, $\mathcal{U} \in px$ для всех $p \in \bar{\varphi}$, $x \in \mathcal{V}$. Поэтому найдётся такое подмножество $P \in p$, что $Px \subseteq \mathcal{U}$. Следовательно, $x \in int(\mathcal{U},p)$ для всех $p \in \bar{\varphi}$, $x \in \mathcal{V}$. По утверждению 1.8, $\mathcal{V} \subseteq int(\mathcal{U},\varphi)$. Значит, $int(\mathcal{U},\varphi) \in \varphi$.

§4.

Пусть X – топологическое пространство, на котором задана полугрупповая операция. Замкнутая подполугруппа $F \subseteq X$ называется *равномерной*, если для любого открытого подмножества $\mathcal{U}$, содержащего F, найдётся такое открытое подмножество $\mathcal{V}$, что $F \subseteq \mathcal{V}$ и $F\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$.

По теореме 3.8, центрированный фильтр на полугруппе S является правотопологическим тогда и только тогда, когда $\bar{\varphi}$ – равномерная подполугруппа полугруппы βS. Действительно, по определению топологии на βS, для любого подмножества $\mathcal{U} \in \varphi$ подмножество $\bar{\mathcal{U}}$ открыто в βS и $\bar{\varphi} \subseteq \bar{\mathcal{U}}$. Кроме того, для всякого открытого в βS подмножества Φ, содержащего $\bar{\varphi}$, найдётся такое $\mathcal{U} \in \varphi$, что $\bar{\mathcal{U}} \in \Phi$.

Для внутренней характеризации равномерных подполугрупп полугруппы βS рассмотрим следующую конструкцию. Всякое отображение $f : S \to \beta S$ однозначно продолжается до непрерывного отображения $\bar{f} : \beta S \to \beta S$. Фиксируем ультрафильтр $q \in \beta S$ и заметим, что базис ультрафильтра $\bar{f}(q)$ образуют

подмножества вида
$$\bigcup\{F_x : x \in Q,\ F_x \in f(x)\},$$
где Q пробегает все подмножества из q, а F_x – подмножества из $f(x)$. Если $f(x) = px$, где p – фиксированный ультрафильтр, то $\bar{f}(q) = pq$.

Для непустого подмножества $H \subseteq \beta S$ отображение $f : S \to \beta S$ назовём H-правильным, если $f(x) = p_x x$, причём $p_x \in H$ для всех $x \in S$.

4.1. Теорема. *Для фильтра φ на полугруппе βS подмножество $\bar{\varphi}$ является равномерной подполугруппой в βS тогда и только тогда, когда $\bar{f}(q) \in \bar{\varphi}$ для любых $q \in \bar{\varphi}$ и $\bar{\varphi}$-правильного отображения $f : S \to \beta S$.*

Доказательство. Пусть $\bar{\varphi}$ – равномерная подполугруппа из βS, $q \in \bar{\varphi}$, $f : S \to \beta S$, $f(x) = p_x x$, $p_x \in \bar{\varphi}$. Возьмём произвольное подмножество $\mathcal{U} \in \varphi$ и, пользуясь равномерностью полугруппы $\bar{\varphi}$, выберем такое подмножество $\mathcal{V} \in \varphi$, что $p\bar{\mathcal{V}} \subseteq \bar{\mathcal{U}}$ для любого $p \in \bar{\varphi}$. Так как $q \in \bar{\varphi}$, то $\mathcal{V} \in q$. Для каждого элемента $x \in \mathcal{V}$ выберем, пользуясь соотношением $p_x\bar{\mathcal{V}} \subseteq \bar{\mathcal{U}}$, такое подмножество $P_x \in p_x$, что $P_x x \subseteq \mathcal{U}$. Тогда $\cup\{P_x x : x \in \mathcal{V}\} \subseteq \mathcal{U}$ и, следовательно, $\mathcal{U} \in \bar{f}(q)$. Поскольку $\mathcal{U}$ – произвольное подмножество из $\bar{\varphi}$, то $\bar{f}(q) \in \bar{\varphi}$.

Пусть $\bar{f}(q) \in \bar{\varphi}$ для любых $q \in \bar{\varphi}$ и $\bar{\varphi}$-правильного отображения f. Допустим, что подмножество $\bar{\varphi}$ не является равномерной подполугруппой в βS. Тогда найдётся такое подмножество $\mathcal{U} \in \varphi$, что для любого подмножества $\mathcal{V} \in \varphi$ существует такой ультрафильтр $p(\mathcal{V}) \in \bar{\varphi}$, что $p(\mathcal{V})\bar{\mathcal{V}} \nsubseteq \bar{\mathcal{U}}$. Выберем элемент $x(\mathcal{V}) \in \mathcal{V}$ так, что $p(\mathcal{V})x(\mathcal{V}) \notin \bar{\mathcal{U}}$. Найдём такое подмножество $P(\mathcal{V}) \in p(\mathcal{V})$, что $P(\mathcal{V})x(\mathcal{V}) \cap \mathcal{U} = \varnothing$.

Положим $H(\mathcal{V}) = \{x(\mathcal{V}') : \mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}\}$ и центрированное семейство подмножеств $\{H(\mathcal{V}) : \mathcal{V} \in \varphi\}$ дополним до ультрафильтра q. Так как $H(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V}$ для любого $\mathcal{V} \in \varphi$, то $q \in \bar{\varphi}$.

Построим $\bar{\varphi}$-правильное отображение $f : S \to \beta S$. Рассмотрим множество $H = \{x(\mathcal{V}) : \mathcal{V} \in \varphi\}$. Если $x \in H$, то $x = x(\mathcal{V})$ для некоторого $\mathcal{V} \in \varphi$. Положим $f(x) = p(\mathcal{V})x$. Если же $x \notin H$, то положим $f(x) = p_0 x$, где p_0 – фиксированный ультрафильтр из $\bar{\varphi}$. По построению отображения f, $S\backslash\mathcal{U} \in \bar{f}(q)$, что противоречит условию $\bar{f}(q) \in \bar{\varphi}$, $\mathcal{U} \in \varphi$. Теорема доказана.

Для построения примера неравномерной подполугруппы воспользуемся следующими определениями и утверждениями из работы [1]. Ультрафильтр p на абелевой группе G называется ***ультрафильтром Шура***, если для любого подмножества $A \in p$ найдутся такие элементы $x, y \in A$, что $x + y \in A$. Множество $Sch(G)$ всех ультрафильтров Шура на группе G является замкнутой подполугруппой в βG.

4.2. Пример. Пусть G – счётная группа экспоненты 2. Докажем, что $Sch(G)$ – неравномерная подполугруппа в βG.

Разложим группу G в прямую сумму двух бесконечных подгрупп $G = X \oplus Y$. Разложим подгруппу X в прямую сумму циклических подгрупп $X = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle x_n \rangle$, а подгруппу Y представим в виде суммы счётного числа бесконечных подгрупп $Y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} Y_n$. Положим $H = \{x_n + x_m : n < m\}$. По лемме 5.2 из работы [1] существует такой ультрафильтр $q \in Sch(G)$, что $H \in q$.

Для каждой подгруппы Y_i выберем такой ультрафильтр $p_i \in Sch(G)$, что $Y_i' \in p$, где $Y_i' = Y_i \backslash \{0\}$. В качестве p_i можно взять, например, любой идемпотент подполугруппы $\beta G \backslash G$, содержащий Y_i.

Зададим $Sch(G)$-правильное отображение $f : G \to \beta G$. Если $x \in H$, то $x = x_n + x_m$, $n < m$, и положим $f(x) = p_n + x$. Если $x \notin H$, то положим $f(x) = p_1 + x$.

Для доказательства неравномерности подполугруппы $Sch(G)$ достаточно, ввиду теоремы 4.1, убедится в том, что $\bar{f}(q) \notin Sch(G)$.

Положим $K = \bigcup\{x_n + x_m + Y_n' : n < m\}$. По определению отображения f и по выбору ультрафильтра, q $K \in \bar{f}(q)$. Поэтому достаточно проверить, что $(K+K) \cap K = \varnothing$. Предположим противное и выберем такие элементы $g, h \in K$, что $g + h \in K$.

По определению подмножества K $g \in x_n + x_m + Y_n'$, $h \in x_k + x_s + Y_k'$, $n < m$, $k < s$. Так как группа G абелева, то можно считать, что $n \leq k$. Возможны три случая.

1) $n = k$, $m \neq s$. Можно считать, что $m < s$. Тогда $g + h \in x_m + x_s + Y_n' + Y_n' \subseteq x_m + x_s + Y_n$, что противоречит соотношению $Y_m' \cap Y_n = \varnothing$.
2) $n < k$, $k = m$. Тогда $g+h \in x_n + x_s + Y_n' + Y_k'$, что противоречит соотношению $(Y_n' + Y_k') \cap Y_n' = \varnothing$.
3) $n < k$, $m = s$. Тогда $g+h \in x_n + x_k + Y_n' + Y_k'$, что противоречит соотношению $(Y_n' + Y_k') \cap Y_n' = \varnothing$.

Обозначим через φ максимальный фильтр на группе G, содержащийся во всех ультрафильтрах $p \in Sch(G)$. Так как $\bar{\varphi} = Sch(G)$, то центрированный полугрупповой фильтр φ не является правотопологическим.

§5. .

Фильтр φ на полугруппе S назовём *регулярным*, если для любого подмножества $\mathcal{U} \in \varphi$ найдётся такое подмножество $\mathcal{V} \in \varphi$, что $cl(\mathcal{V}, \varphi) \subseteq \mathcal{U}$.

Пусть p – фиксированный ультрафильтр из βS. Фильтр φ на полугруппе S назовем p-регулярным, если для любого подмножества $\mathcal{U} \in \varphi$ найдется такое подмножество $\mathcal{V} \in \varphi$, что $cl(\mathcal{V}, p) \subset \mathcal{U}$.

Если фильтр φ p-регулярен для любого ультрафильтра $p \in \bar{\varphi}$, то фильтр φ называется *ультрарегулярным.* Очевидно, что всякий регулярный фильтр ультрарегулярен. Если подмножество $\bar{\varphi}$ конечно, то верно и обратное утверждение.

5.1. Теорема. *Фильтр φ – p-регулярный тогда и только тогда, когда для любого ультрафильтра $q \in \beta S$ из условия $pq \in \bar{\varphi}$ следует, что $q \in \bar{\varphi}$.*

Доказательство. Пусть φ – p-регулярный фильтр и $pq \in \bar{\varphi}$. Фиксируем произвольное подмножество $\mathcal{U} \in \varphi$ и выберем подмножество $\mathcal{V} \in \varphi$ так, что $cl(\mathcal{V}, p) \subseteq \mathcal{U}$. Так как $\mathcal{V} \in pq$, то $cl(\mathcal{V}, p) \in q$. Из включения $cl(\mathcal{V}, p) \subseteq \mathcal{U}$ следует, что $\mathcal{U} \in q$. Ввиду произвола выбора $\mathcal{U}$, $q \in \bar{\varphi}$.

Наоборот, пусть условие $pq \in \bar{\varphi}$ влечёт $q \in \bar{\varphi}$. Убедимся в том, что фильтр φ p-регулярный. Предположим противное и выберем такое подмножество $\mathcal{U} \in \varphi$, что $cl(\mathcal{V}, p) \nsubseteq \mathcal{U}$ для любого $\mathcal{V} \in \varphi$. Центрированное семейство подмножеств $\{cl(\mathcal{V}, p) \backslash \mathcal{U} : \mathcal{V} \in \varphi\}$ дополним до ультрафильтра q. Так как $cl(\mathcal{V}, p) \in q$, то $\mathcal{V} \in pq$. Следовательно, $pq \in \bar{\varphi}$. Однако, $\mathcal{U} \notin q$ и поэтому $q \notin \bar{\varphi}$, что противоречит предположению.

5.2. Следствие. *Фильтр φ ультрарегулярный тогда и только тогда, когда для любого ультрафильтра $p \in \bar{\varphi}$ и любого ультрафильтра $q \in \beta S$ из условия $pq \in \bar{\varphi}$ следует $q \in \bar{\varphi}$.*

5.3. Вопрос. *Верно ли, что любой ультрарегулярный правотопологический фильтр регулярен?*

Изучим свойства отделимости топологий на группе, порождённых ультрафильтрами. Для ультрафильтра p на группе G положим $\dot{p} = \{\dot{P} : P \in p\}$, где $\dot{P} = P \cup \{e\}$, e – единица группы. Если $p \in \beta G \backslash G$, то центрированный фильтр $\dot{p}$ правотопологический тогда и только тогда, когда p – идемпотент полугруппы βG.

5.4. Лемма. *Для любых ультрафильтра p на группе G и элемента $g \in G$ $pg = p$ тогда и только тогда, когда $g = e$.*

Доказательство. Допустим, что $pg = p$, $g \neq e$. Рассмотрим отображение $f : G \to G$, заданное правилом $f(x) = xq$. Так как отображение f не имеет неподвижных точек, по лемме де Брёйна-Эрдёша [5, лемма 3.1] существует такое разбиение $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$, что $f(G_i) \cap G_i = \varnothing$, $i = 1, 2, 3$. Поскольку p – ультрафильтр, то $G_i \in p$ для некоторого индекса i. Значит, $G_i \cap G_i g = \varnothing$, что противоречит соотношению $pg = p$.

5.5. Теорема. *Пусть G – группа, p – идемпотент полугруппы βG. Топология $\langle \dot{p} \rangle$ регулярна тогда и только тогда, когда уравнение $px = p$ имеет в βG лишь тривиальные решения $x = e$, $x = p$.*

Доказательство. Если p – главный ультрафильтр, то $p = e$ и теорема очевидна. Пусть $p \in \beta G \backslash G$, $g \in G$, $g \neq e$. По лемме 5.4, найдётся такое подмножество $P \in p$, что $P \cap Pg = \varnothing$. Поскольку p – свободный ультрафильтр, существует такое подмножество $F \in p$, что $F \subseteq P$, $g \notin F$, $g^{-1} \notin F$. Тогда $\dot{F}e \cap \dot{F}g = \varnothing$, $\dot{F} \in \dot{p}$ и мы нашли непересекающиеся окрестности в топологии $\langle \dot{p} \rangle$ элементов g и e.

Второе утверждение теоремы вытекает из конечности полугруппы $\{p, e\}$ и следствия 5.2.

5.6. Следствие. *Если p – идемпотент из $\beta G \backslash G$ и топология $\langle \dot{p} \rangle$ на группе G регулярна, то p – L-максимальный идемпотент в $\beta G \backslash G$.*

Доказательство. Достаточно напомнить, что L-отношение Грина является предпорядком на множестве идемпотентов и по определению $p \leq q$, если $pq = p$. Поэтому идемпотент p L-максимален в $\beta G \backslash G$ тогда и только тогда, когда для любого идемпотента $q \in \beta G \backslash G$ условие $pq = p$ влечёт $qp = p$.

Отметим, что L-максимальные идемпотенты на множестве $\beta G \backslash G$ существуют для любой бесконечной группы G [6, теорема 2.7]. Однако, известные автору примеры идемпотентов $p \in \beta G \backslash G$, порождающих регулярную топологию $\langle \dot{p} \rangle$ на группе G, построены лишь при дополнительных к аксиомам ZFC теоретико-множественных предположениях (см. §7).

Тем не менее, для любого идемпотента $p \in \beta G$ топологию $\langle \dot{p} \rangle$ на группе G можно "регуляризировать" путём следующего естественного ослабления. Для ультрафильтра $p \in \beta G$ обозначим через $\pi(p)$ фильтр на группе G с базисом $\{cl(A, p) : A \in p\}$. Ясно, что $\overline{\pi(p)} = \{q \in \beta G : pq = p\}$ и, в частности, $\pi(p) \subseteq p$ для любого идемпотента $p \in \beta G$.

5.7. Теорема. *Для любого ультрафильтра $p \in \beta G$ фильтр $\pi(p)$ правотопологический, а топология $\langle\pi(p)\rangle$ на группе G хаусдорфова, экстремально несвязна и регулярна.*

Доказательство. Покажем вначале, что $\pi(p)$ – правотопологический фильтр. Так как $e \in cl(A,p)$ для любого $A \in p$, то фильтр $\pi(p)$ центрированный. Фиксируем подмножество $A \in p$ и, пользуясь утверждениями 1.7, 1.8, получим

$$int(cl(A,p), \pi(p)) = \cap\{cl(cl(A,p),q) : q \in \overline{\pi(p)}\}.$$

Так как $cl(cl(A,p),q) = cl(A,pq)$ и $pq = p$, то $int(cl(A,p), \pi(p)) = cl(A,p)$. Поскольку $cl(A,p) \in \pi(p)$, то фильтр $\pi(p)$ правотопологический по определению.

Допустим, что в топологии $\pi(p)$ некоторый ультрафильтр q сходится к единице и элементу $x \in G$. Так как $q \in \overline{\pi(p)}$ и $qx^{-1} \in \overline{\pi(p)}$, то $pq = p$ и $pqx^{-1} = p$. По лемме 5.4, $x = e$, следовательно, топология $\langle\pi(p)\rangle$ хаусдорфова.

Для доказательства регулярности топологии $\langle\pi(p)\rangle$ заметим, что подмножество $cl(A,p)$ замкнуто для любого $A \in p$. Действительно, если $cl(cl(A,p), \pi(p))$, то найдётся такой ультрафильтр $q \in \overline{\pi(p)}$, что $x \in cl(cl(A,p),q)$. Так как $x \in cl(cl(A,p),q) = cl(A,pq)$ и $pq = p$, то $x \in cl(A,p)$.

Наконец, предположим, что топология $\langle\pi(p)\rangle$ не является экстремально несвязной, т.е. замыкание некоторого открытого подмножества не является открытым. Ввиду однородности топологии $\langle\pi(p)\rangle$ найдётся такое открытое подмножество $\mathcal{U}$, что $e \notin \mathcal{U}$, $e \in \mathcal{W}$, где $\mathcal{W}$ – замыкание подмножества $\mathcal{U}$ в топологии $\langle\pi(p)\rangle$, и $G \backslash \mathcal{W}$ не является окрестностью единицы. Так как p – ультрафильтр, то $\mathcal{U} \in p$, либо $(G\backslash\mathcal{U}) \in p$. Если $\mathcal{U} \in p$, то $\mathcal{W} \in p$. Однако, $\mathcal{W} = cl(\mathcal{W}, \pi(p))$ и, по определению топологии, $\langle\pi(p)\rangle$, $\mathcal{W}$ – окрестность единицы, что противоречит выбору $\mathcal{W}$. Если же $(G\backslash\mathcal{U}) \in p$, то $cl(G\backslash\mathcal{U}, p)$ – окрестность единицы. Однако, $cl(G\backslash\mathcal{U}, p) \subseteq G\backslash\mathcal{U}$ и, следовательно, $e \notin \mathcal{W}$ вопреки выбору $\mathcal{W}$.

§6. .

Центрированный фильтр φ на полугруппе S назовём *мультипликативным*, если для любого подмножества $\mathcal{U} \in \varphi$ существует такое подмножество $\mathcal{V} \in \varphi$, что $\mathcal{V}\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. В этом случае $\mathcal{V} \subseteq int(\mathcal{U}, \varphi)$, поэтому всякий мультипликативный фильтр является правотопологическим.

Для мультипликативного фильтра φ на полугруппе S операция умножения непрерывна в топологии $\langle\varphi\rangle$ по совокупности аргументов в точке (e,e). Если, сверх того, полугруппа S коммутативна, то $(S, \langle\varphi\rangle)$ – топологическая полугруппа. Наоборот, если полугруппа S с единицей e снабжена некоторой топологией, причём операция умножения непрерывна в точке (e,e), то фильтр окрестностей единицы мультипликативен.

Полугрупповая характеризация мультипликативных фильтров, аналогичная теореме 4.1 для правотопологических фильтров, неизвестна. Укажем одно интересное свойство мультипликативных фильтров на группах.

Центрированный фильтр φ на группе G называется *симметричным*, если $F^{-1} \in \varphi$ для любого подмножества $F \in \varphi$. Симметричный фильтр φ на группе G называется *жёстким*, если $p\bar{\varphi} \cap \bar{\varphi} = \varnothing$, $\bar{\varphi}p \cap \bar{\varphi} = \varnothing$ для любого ультрафильтра $p \notin \bar{\varphi}$. Следуещее утверждение по существу доказано в работе [1, лемма 1.1].

6.1. *Симметричный мультипликативный фильтр на группе является жёстким.*

Обратить это утверждение нельзя. Более того, как показывет следующий пример, жёсткий фильтр может не быть даже полугрупповым.

6.2. Пример. Разложим счётную группу G экспоненты 2 в прямую сумму циклических подгрупп $G = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle g_n \rangle$ и положим $A = \{g_n : n = 1, 2, \dots\}$. Расмотрим фильтр φ на группе G с базисом из множеств вида $F \cup \{0\}$, где $F \subseteq A$ и подмножество $A \backslash F$ конечно. Жёсткость фильтра φ проверяется непосредственно.

6.3. Вопрос. *Верно ли, что жёсткий полугрупповой фильтр является правотопологическим?*

6.4. Вопрос. *Верно ли, что жёсткий правотопологический фильтр мультипликативен?*

§7.

Свободный ультрафильтр p на полугруппе S с единицей e назовём *почти мультипликативным*, если $\dot{p} = \{\dot{P} : P \in p\}$ – мультипликативный фильтр, где $\dot{P} = P \cup \{e\}$. Топология $\langle \dot{p} \rangle$ на полугруппе S, порождённая таким ультрафильтром p, почти дискретна в следующем смысле. В топологии $\langle \dot{p} \rangle$ сходится к единице лишь один свободный ультрафильтр p, в частности, топология $\langle \dot{p} \rangle$ экстремально несвязна.

Следующая теорема показывает, что наличие почти мультипликативного ультрафильтра на полугруппе S накладывает сильные ограничения на полугруппу.

7.1. Теорема. *Если p – почти мультипликативный ультрафильтр на полугруппе S, то найдётся такое подмножество $P \in p$, что либо $x^2 = x$ для всех $x \in P$, либо $x^2 = e$ для всех $x \in P$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $f : S \to S$, заданное правилом $f(x) = x^2$, и положим $S_0 = \{x \in S : x^2 = x\}$. По лемме де Брёйна-Эрдеша [5, лемма 3.1] найдётся такое разбиение $S = S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3$, что $f(S_i) \cap S_i = \varnothing$ при $i = 1, 2, 3$. Поскольку p – ультрафильтр, то $S_i \in p$ для некоторого i. Если $i = 0$, то полагаем $P = S_0$ и получаем $x^2 = x$ для всех $x \in P$. Если $i \neq 0$, то $f(S_i) \cap S_i = \varnothing$. Так как $\dot{p}$ – мультипликативный фильтр, то найдётся такое подмножество $P \in p$, что $P \subseteq S_i$, $PP \subseteq \dot{S}_i$. Поскольку $f(P) \subseteq PP$, то $f(P) \subseteq \dot{S}_i$. Так как $f(P) \cap S_i = \varnothing$, то $f(P) = \{e\}$, т.е. $x^2 = e$ для всех $x \in P$.

Для почти мультипликативных ультрафильтров на группах доказанную теорему можно уточнить.

7.2. Теорема. *Если p – почти мультипликативный ультрафильтр на группе G, то существует такая счётная подгруппа H экспоненты 2, что $H \in p$.*

Доказательство. По теореме 7.1 найдётся такое подмножество $P \in p$, что $x^2 = e$ для всех $x \in P$ (первая возможность исключается, поскольку p – свободный ультрафильтр). Пользуясь мультипликативностью ультрафильтра $\dot{p}$, подберём такое подмножество $Q \in p$, что $Q \subseteq P$, $QQ \subseteq \dot{P}$. Если $x, y \in Q$, то

$(xy)^2 = x^2 = y^2 = e$, значит, $xy = yx$. Поэтому подгуппа K, порождённая подмножеством Q, коммутативна и имеет экспоненту 2. Так как $K \in p$, то можно считать ультрафильтр p заданным на группе K. Заметим, что $(K, \langle \dot{p} \rangle)$ – топологическая группа, в которой нет дизъюнктных подмножеств, касающихся единицы. По теореме Малыхина [7, теорема 2], K содержит счётную открытую подгруппу H. Поскольку H – окрестность единицы в топологии $\langle \dot{p} \rangle$, то $H \in p$.

Почти мультипликативный ультрафильтр на счётной группе по существу построил В.И. Малыхин в работе [7], используя лемму Буса – дополнительное к систоеме аксиом ZFC теоретико-множественное предположение. Можно ли построить такие ультрафильтры основываясь лишь на аксиоматике ZFC? Наша дальнейшая цель — обосновать отрицательный ответ на этот вопрос.

Напомним, что точка x топологического пространства называется P-точкой, если пересечение любого счётного набора окрестностей точки x является окрестностью этой точки. Рассмотрим множество $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ с дискретной топологией. Как известно [5], свободный ультрафильтр p на ω является P-точкой в пространстве $\beta\omega \backslash \omega$ тогда и только тогда, когда для любого отображения $f : \omega \to \omega$ возможны лишь следующие случаи:

1) существуют такие подмножество $A \in p$ и $n \in \omega$, что $f(x) = n$ для всех $x \in A$;
2) существует такое подмножество $A \in p$, что сужение отображения f на A имеет конечные прообразы точек.

P-точки в пространстве $\beta\omega \backslash \omega$ легко построить, используя, например, континуум-гипотезу. Однако, как показал С. Шелах [8], существуют такие модели ZFC, в которых пространство $\beta\omega \backslash \omega$ не имеет P-точек. Следовательно, для нашей цели достаточно, учитывая теорему 7.2, показать, что из существования почти мультипликативного ультрафильтра на счётной группе экспоненты 2 вытекает существование P-точки в пространстве $\beta\omega \backslash \omega$.

Отождествим группу G с семейством $\mathcal{F}(\omega)$ всех конечных подмножеств множества ω. Разумеется роль групповой операции $+$ на $\mathcal{F}(\omega)$ исполняет симметрическая разность подмножеств. Для элемента $a \in \mathcal{F}(\omega)$ обозначим $\min a$ и $\max a$ соотвественно наименьший и наибольший элемент конечного подмножества a в естественном порядке на ω. Если $P \subseteq \mathcal{F}(\omega)$, то по определению положим $\max P = \{\max a : a \in P\}$. Если p – ультрафильтр на ω, то семейство подмножеств $\{\max P : P \in p\}$ образует базис однозначно определённого ультрафильтра на ω, который мы обозначим $\max p$. Схема доказательства следующей теоремы заимствована из работы [9].

7.3. Теорема. *Если p – почти мультипликативный ультрафильтр на группе $\mathcal{F}(\omega)$, то ультрафильтр $\max p$ – P-точка в пространстве $\beta\omega \backslash \omega$.*

Доказательство. Покажем, прежде всего, что для любого $n \in \omega$ существует такое подмножество $P \in p$, что $\min a > n$ для всех $a \in P$. Действительно, в противном случае подмножество $Q = \{a \in \mathcal{F}(\omega) : \min a = m\}$ является элементом ультрафильтра p для некоторого $m \in \omega$. Так как фильтр $\dot{p}$ мультипликативный, то найдутся такие различные элементы $a_1, a_2 \in Q$, что $a_1 + a_2 \in Q$. Однако $\min(a_1 + a_2) > m$, что противоречит выбору Q.

Рассмотрим произвольное отображение $f : \omega \to \omega$. Для любого $a \in \mathcal{F}(\omega)$, $a \neq \varnothing$, имеются такие альтернативные возможности: $f(\max A) \leq \min a$, $f(\max a) > \min a$. Поскольку $\max p$ – ультрафильтр, то найдётся такое подмножество $P \in p$, для которого выполняется одно из следующих двух условий.

1) $f(\max A) \leq \min a$, для всех $a \in P$. Подберём такое подмножество $Q \in p$, что $Q + Q \subseteq \dot{P}$, $\dot{P} = P \cup \{\varnothing\}$. Фиксируем произвольный элемент $b \in Q$ и выберем такое подмножество $Q' \in p$, что $Q' \subseteq Q$, $b + Q' \subseteq P$ и $\min a > \max b$ для всех $a \in Q'$. Но тогда $\max(a + b) = \max a$, $\min(a + b) = \min b$. Значит, $f(\max a) = f(\max(a + b) \leq \min(a + b) = \min b$. Таким образом, отображение f ограничено на подмножестве $\max Q'$ и приходим к первому условию в характеризации P-точки из $\beta\omega\backslash\omega$.
2) $f(\max a) > \min a$ для всех $a \in P$. Снова найдём, пользуясь мультипликативностью фильтра $\dot{p}$, такое подмножество $Q \in p$, что $Q+Q \subseteq \dot{P}$. Допустим, что существуют такие $k \in \omega$ и последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ различных элементов из Q, что $f(\max a_i) = k$ для всех i. Значит, для всех i $\min a_i < k$ и по принципу Дирихле найдутся такие индексы m, n, что

$$\max a_m > \max a_n, \quad \{0, 1, \ldots, k\} \cap a_m = \{0, 1, \ldots, k\} \cap a_n.$$

Такой выбор m, n обеспечивает выполнение неравенств $\max(a_m + a_n) = \max a_m$, $\min(a_m + a_n) > k$. Так как $a_m + a_n \in P$, $f(\max(a_m + a)n) > \min(a_m + a_n) > k$, что противоречит неравенству $f(\max a_m) < k$. Следовательно, сужение отображения f на подмножество $\max Q$ имеет конечные прообразы точек и приходим к второму условию в характеризации P-точки из $\beta\omega\backslash\omega$.

7.4. Вопрос. *Пусть G – счётная группа экспоненты 2, p – идемпотент из $\beta G\backslash G$ и топология $\langle\dot{p}\rangle$ регулярна. Верно ли, что p – почти мультипликативный ультрафильтр? Обратное утверждение легко следует из теоремы 5.5.*

В отличие от групп, почти мультипликативные ультрафильтры на полугруппах строятся довольно просто. Подмножество A полугруппы S назовём альтернативным, если для любых $x, y \in A$ либо $xy = x$, либо $xy = y$. Полугруппа называется альтернативной, если подмножество S альтернативно. Примеры альтернативных полугрупп: левонулевая полугруппа ($xy = x$ для любых $x, y \in S$), правонулевая полугруппа ($xy = y$ для любых $x, y \in S$), линейно упорядоченное множество с операциенй $xy = \max\{x, y\}$. Очевидно, что свободный ультрафильтр на полугрупе с единицей, содержащий альтернативное подмножество, почти мультипликативен. Существуют почти мультипликативные ультрафильтры на полугруппах идемпотентов, которые не содержат альтернативных подмножеств. Пример – объединительные ультрафильтры на множестве $\mathcal{F}(\omega)$ как полугруппе с операцией объединения [9]. Однако, такие ультрафильтры строятся с использованием лемы Буса, а поэтому естественно возникает следующий вопрос.

7.5. Вопрос. *Существуют ли наивные примеры почти мультипликативных ультрафильтров на полугруппах идемпотентов?*

ЛИТЕРАТУРА

1. Протасов И.В. *Ультрафильтры и топологии на группах* // Сиб. мат. журн. 1993. Т.34, № 5. С.163–180.

2. Протасов И.В. *Почти дискретные группы* // Третья международная конференция по алгебре. Красноярск, 23–28 августа 1993г. Тезисы докладов. С.227.

3. Куратовский К. Топология. Т.1. – М.: Мир, 1996.

4. Hindman N. *Ultrafilters and combinatorical number theory* // Lecture Notes in Math. 1979. V.751. P.49–184.

5. Comfort W.W. *Ultrafilters: some old and some new results* // Bull. Amer. Math. Soc. 1977. V.83. № 4. P.417–455.

6. Ruppert W. *Compact semitopological semigroups: An intrinsic theory* // Lecture Note in Math. 1984. V.1079. P.1–260.

7. Малыхин В.И. *Об экстремально несвязных топологических группах* // Усп. мат. наук. 1979. Т.34. № 6. С.59–66.

8. Shelach S. *Proper forcing* // Lecture Notes in Math. 1982. V.940.

9. Blass A., Hindman N. *On strongly summable and union ultrafilters* // Trans. Amer. Math. Soc. 1987. V.304. No 1 P.83–99.

Department of Cybernetics, Kiev University, pr. Glushkova, 6, Kiev, Ukraine

Поступила 10.01.1994