Математичні студії
1994, випуск 3

УДК 512.536.7

# ВЛОЖЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛУГРУПП В ПРОСТЫЕ

О.В. Гутик

Abstract. O. Gutik, *Embedding of topological semigroups in simple semigroups* // Matematychni Studii. **3** (1994) 10–14.

Any topological (inverse) semigroup is embedded into a simple topological (inverse) semigroup. The Bruck semigroup of a topological inverse semigroup with minimal idempotent admits the only direct sum topology.

В алгебраической теории полугрупп известна следующая конструкция Брака вложения произвольной полугруппы в простую полугруппу с единицей [1], [2, стр. 139-140]. Пусть $S$ – полугруппа, $a, b \notin S$. Полугруппа $\mathcal{C}(S)$ порождается множеством $S \cup \{a, b\}$, и задается определяющими соотношениями $ab = 1$, $as = a$, $sb = b$ для всех $s \in S$, а также соотношениями, выполняющимися в $S$. Единицей полугруппы $\mathcal{C}(S)$ является или единица полугруппы $S$, если $1 \in S$, или присоединенная обычным образом к $\mathcal{C}(S)$ единица, если $S$ не содержит единицы. Полугруппу $\mathcal{C}(S)$, постоенную таким образом, будем называть полугруппой Брака на $S$. Каждый элемент полугруппы $\mathcal{C}(S)$ единственным образом представляется в виде $b^i t a^j$, где $t \in S \cup \{1\}$, $i, j \in \mathbb{Z}_+$. Полугруппа $S$ алгебраически вкладывается в $\mathcal{C}(S)$ и $\mathcal{C}(S)$ – простая полугруппа.

Цель настоящей статьи – распространить указанную конструкцию на топологические полугруппы. Для топологических инверсных полугрупп $S$, обладающих минимальным идемпотентом, топология прямой суммы на $\mathcal{C}(S)$ оказывается единственной среди топологий $\tau$, индуцирующих на $S$ исходную, и таких, что $(\mathcal{C}(S), \tau)$ – топологическая инверсная полугруппа. Приведен пример, показывающий, что условие существования минимального идемпотента – существенное.

**Теорема 1.** *Произвольная топологическая полугруппа топологически изоморфно вкладывается в простую топологическую полугруппу с единицей.*

*Доказательство.* Пусть $(S, \tau)$ – топологическая полугруппа. На $\mathcal{C}(S)$ определим топологию $\tau^*$ следующим образом. Пусть $\mathcal{B}$ – база топологии $\tau$ на $S$. Рассмотрим семейство $\mathcal{B}_\mathcal{C} = \{b^i U a^j \mid U \in \mathcal{B},\ i, j \in \mathbb{Z}_+\}$ подмножеств в $\mathcal{C}(S)$. Тогда $\mathcal{B}_\mathcal{C}$ – база топологии $\tau^*$ на $\mathcal{C}(S)$, так как выполняются условия (B1)–(B2) [3]. Покажем, что $\tau^*$ – полугрупповая топология на $\mathcal{C}(S)$. Пусть $s$ и $t$ произвольные элементы из $S$. Так как $S$ – топологическая полугруппа, то для

1991 *Mathematics Subject Classification.* 22A15, 20M18.

произвольной окрестности $U(st)$ существуют окрестности $U_1(s)$ и $U_2(t)$ такие, что

$$U_1(s)U_2(t) \subseteq U(st).$$

Пусть $b^i s a^j$ и $b^k t a^l$ – произвольные элементы из $\mathcal{C}(S)$. Рассмотрим возможные случаи.

(1) $j = k$, $b^i s a^j \cdot b^k t a^l = b^i s t a^l$.
Тогда $b^i U_1(s) a^j \cdot b^k U_2(t) a^l \subseteq b^i U(st) a^l$.
(2) $j < k$, $b^i s a^j \cdot b^k t a^l = b^{i+k-j} t a^l$.
Тогда $b^i U_1(s) a^j \cdot b^k U(t) a^l \subseteq b^{i+k-l} U(t) a^l$.
(3) $j > k$, $b^i s a^j \cdot b^k t a^l = b^i s a^{l+j-k}$.
Тогда $b^i U(s) a^j \cdot b^k U_2(t) a^l \subseteq b^i U(s) a^{l+j-k}$.

Таким образом операция умножения непрерывна в топологии $\tau^*$.

Инверсную полугруппу $S$, наделенную топологией, будем называть топологической инверсной полугруппой, если умножение и инверсия непрерывны относительно этой топологии.

**Следствие 1.** *Произвольная топологическая инверсная полугруппа топологически изоморфно вкладывается в простую топологическую инверсную полугруппу с единицей.*

*Доказательство.* Пусть $(S, \tau)$ – топологическая инверсная полугруппа. По теореме 8.48 [2], $\mathcal{C}(S)$ – инверсная полугруппа, а по теореме 1 – топологическая полугруппа. Так как $(S, \tau)$ – топологическая инверсная полугруппа, то для произвольной окрестности $U(s)$ существует окрестность $V(s^{-1}) \subset (U(s))^{-1}$ такая, что $(V(s^{-1}))^{-1} \subset U(s)$. Тогда для произвольной окрестности $b^i U(s) a^j$ выполняется включение $(b^j V(s^{-1}) a^i)^{-1} \subset b^i U(s) a^j$.

**Следствие 2.** *Полугруппа $(S, \tau)$ – открыто-замкнутая подполугруппа в $(\mathcal{C}(S), \tau^*)$. Пространство $(\mathcal{C}(S), \tau^*)$ гомеоморфно произведению $\mathbb{Z}_+ \times S \times \mathbb{Z}_+$, где $\mathbb{Z}_+$ – счетное дискретное пространство.*

Очевидно, что гомеоморфизм $\varphi : \mathcal{C}(S) \to \mathbb{Z}_+ \times S \times \mathbb{Z}_+$ можно определить следующим образом: $\varphi(b^i s a^j) = (i, s, j)$.

**Предложение.** *Произвольная метризуемая топологическая (инверсная) полугруппа изоморфно и изометрически вкладивается в простую метризуемую топологическую (инверсную) полугруппу с единицей.*

Если $d$ – метрика на $S$, то, очевидно, что на $\mathcal{C}(S)$ метрику $d^*$ можно определить следующим образом

$$d^*(b^i s a^j, b^k t a^l) = d(s,t) + |i-k| + |j-l|.$$

Эта метрика, очевидно, порождает ранее построенную топологию $\tau^*$ на $\mathcal{C}(S)$.

Определение. Пусть задано семейство $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ попарно не пересекающихся топологических пространств. Рассмотрим множество $X = \bigcup\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ и семейство $\tau$ всех множеств $U \subset X$ таких, что $U \cap X_\alpha$ открыто в $X_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$. Множество $X$ с топологией $\tau$ называется суммой пространств $\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ и обозначается $\oplus\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Топология $\tau$ на $X$ называется топологией прямой суммы.

Далее $S$ — топологическая инверсная полугруппа. Через $E(S)$ обозначим подполугруппу идемпотентов полугруппы $S$, а через $x^{-1}$ – элемент, инверсный элементу $x$. Для произвольных $i,j\in\mathbb{Z}_+$ пусть $S_{i,j}=\{b^isa^j\mid s\in S\}$.

Окрестность $U(e)$, $e\in E(S)$, называется симметрической, если $x\in U(e)\Rightarrow x^{-1}\in U(e)$.

**Теорема 2.** *Пусть $(S,\tau)$ – топологическая инверсная полугруппа, $\mathcal{C}(S)$ – полугруппа Брака на $S$. $\tilde{\tau}$ – топология на $\mathcal{C}(S)$ такая, что выполняются следующие условия*

(1) *$(\mathcal{C}(S),\tilde{\tau})$ – хаусдорфова топологическая инверсная полугруппа;*
(2) *$\tilde{\tau}|_S=\tau$.*

*Тогда, если $S$ – полугруппа с минимальным идемпотентом, то*

$$\mathcal{C}(S)=\oplus\{S_{i,j}\mid i,j\in\mathbb{Z}_+\}.$$

Докажем несколько вспомогательных лемм.

**Лемма 1.** *Пусть $S$ – топологическая инверсная полугруппа. Тогда для произвольного $e\in E(S)$ существует база симметричных окрестностей точки $e$.*

*Доказательство.* Пусть $\mathcal{B}(e)$ – база топологии в точке $e\in E(S)$ и $U(e)\in\mathcal{B}(e)$. Существует окрестность $V(e)$ такая, что $V(e)V(e)\subset U(e)$. Положим $O(e)=V(e)\cap$
$\cap(V(e))^{-1}$. Семейство симметрических окрестностей точки $e$, построенное таким образом, удовлетворяет условиям (BP1)–(BP2) [3], и, следовательно, определяют базу топологии в точке $e$.

**Лемма 2.** *Пусть $e\in E(\mathcal{C}(S))$ и $e\in S_{i,i}$. Тогда существует окрестность $U(e)$ такая, что $U(e)\cap S_{j,j}=\emptyset$ для всех $j>i$, $i,j\in\mathbb{Z}_+$.*

*Доказательство.* Положим $e^0=b^{i+1}a^{i+1}$, тогда $ee^0=e^0$. Допустим, что все окрестности точки $e$ пересекаются с множеством $\bigcup\{S_{j,j}\mid j>i\}$. Так как $(\mathcal{C}(S),\tilde{\tau})$ – топологическая инверсная хаусдорфова полугруппа, то для каждой окрестности $U(e^0)$ существуют окрестности $V(e)$ и $W(e^0)$ такие, что $V(e)\cap W(e^0)\subset U(e^0)$, причем $V(e)\cap W(e^0)=\emptyset$ и $V(e)\cap U(e^0)=\emptyset$. Но последнее равенство не выполняется, так как для произвольного $x\in V(e)\cap(\cup\{S_{j,j}\mid j>i\})$ имеем $xe^0=x\notin U(e^0)$. Полученное противоречие доказывает лемму.

**Лемма 3.** *Пусть $e\in E(\mathcal{C}(S))$, $e\in S_{i,i}$ и $e\neq b^ia^i$. Тогда существует окрестность $U(e)$ такая, что $U(e)\cap S_{j,j}=\emptyset$ для всех $j<i$, $i,j\in\mathbb{Z}_+$.*

*Доказательство.* Рассмотрим отображение $h(x)=xb^ia^i$. Для всех $s\in S$ и $j<i$ $b^jsa^jb^ia^i=b^ia^i$. Пусть $U(e)$ – произвольная окрестность идемпотента $e$. Множество $h^{-1}(b^ia^i)$ замкнуто в $(\mathcal{C}(S),\tilde{\tau})$ и $e\notin h^{-1}(a^ib^i)$, следовательно $O(e)=$
$=U(e)\backslash h^{-1}(b^ia^i)$ – открытая окрестность точки $e$ и $O(e)$ не содержит идемпотентов из $S_{j,j}$, $j<i$.

**Лемма 4.** *Пусть $S$ – полугруппа с минимальным идемпотентом, тогда для произвольного $i\geq 1$ существует окрестность $U(b^ia^i)$, не пересекающаяся с $S_{j,j}$, $j<i$.*

*Доказательство.* Пусть $e^0$ – минимальный идемпотент полугруппы $S$. Положим $e_0 = b^{i-1}e^0a^{i-1}$ и $e = b^ia^i$, тогда $e_0e = e$. Пусть $U(e)$ – произвольная окрестность точки $e$. Множество $h^{-1}(e_0)$ замкнуто в $(\mathcal{C}(S), \tilde{\tau})$ и $e \notin h^{-1}(e_0)$. Следовательно, $O(e) = U(e) \backslash h^{-1}(e_0)$ – открытая окрестность точки $e$. По лемме 1, существуют симметрические окрестности $\tilde{O}(e)$ и $W(e)$ такие, что $\tilde{O}(e) \subset O(e)$, $\tilde{O}(e) \cap S_{j,j} = \emptyset$ для произвольного $j < i$, и $W(e)W(e) \subset \tilde{O}(e)$, $W(e) \cap S_{j,j} = \emptyset$ для всех $j < i$. Если $W(e) \cap (\cup\{S_{j,j} \mid j < i\}) \neq \emptyset$, то существует $x \in W(e) \cap S_{j,j}$, следовательно $x^{-1} \in S_{j,j}$, что противоречит тому, что $W(e)W(e) \subset \tilde{O}(e)$. Лемма доказана.

**Лемма 5.** *Пусть $e \in E(\mathcal{C}(S))$, $e \in S_{i,i}$ и существует окрестность идемпотента $e$, не пересекающаяся с $S_{j,j}$ для всех $j \neq i$, $j \in \mathbb{Z}_+$. Тогда существует окрестность $U(e)$ такая, что $U(e) \subset S_{i,i}$.*

*Доказательство.* Предположим, что для всех окрестностей $U(e)$ таких, что $U(e) \cap (\cup\{S_{j,j} \mid j \neq i\}) = \emptyset$ выполняется $U(e) \not\subset S_{i,i}$. Зафиксируем окрестность $U(e)$. По лемме 1, выберем такую симметрическую окрестность $O(e)$, что $O(e)O(e) \subset U(e)$ и $O(e) \subset S_{i,i}$. Если $O(e) \not\subset S_{i,i}$ и $O(e)$ – симметрическая окрестность, тогда существует точка $x \in O(e) \backslash S_{i,i}$ такая, что $x^{-1} \in O(e)$. Поскольку $xx^{-1}, x^{-1}x \in U(e)$, $xx^{-1}, x^{-1}x$ — идемпотенты, то $xx^{-1}, x^{-1}x \in S_{i,i}$, но это невозможно потому, что если $xx^{-1} \in S_{i,i}$, то $x = b^isa^k$ ($s \in S$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $k \neq i$) и $x^{-1}x = b^ks^{-1}sa^k \notin S_{i,i}$, или если $x^{-1}x \in S_{i,i}$, то $x = b^ksa^i$ и $xx^{-1} = b^kss^{-1}a^k \notin S_{i,i}$. Противоречие. Лемма доказана.

*Доказательство теоремы 2.* Из лемм 2–5 следует, что множество $E(S_{i,i})$ открыто в $E(\mathcal{C}(S))$ для каждого $i \in \mathbb{Z}_+$. Ретракции $\varphi(x) = xx^{-1}$ и $\psi(x) = x^{-1}x$ непрерывны в $(\mathcal{C}(S), \tilde{\tau})$, и, следовательно, множества $S_{i,j}$ $(i, j \in \mathbb{Z}_+)$ открыто-замкнуты, так как $S_{i,j} = \varphi^{-1}(E(S_{i,i})) \cap \psi^{-1}(E(S_{j,j}))$. Таким образом, $\tilde{\tau}$ – топология прямой суммы.

Из доказанной теоремы следует, что на бициклической полугруппе (как инверсной) существует только дискретная полугрупповая топология. Ранее этот результат был получен в работе [4, следствие 1.2]. Следующий пример показывает, что существование минимального идемпотента в $S$ – существенное условие.

Пример. Пусть $S = ([0, 1[, \max)$ – полугруппа с естественной топологией $\tau$. В точках вида $b^ja^j$ $(i, j \in \mathbb{N})$ в полугруппе $\mathcal{C}(S)$ можно ослабить топологию $\tau^*$ до полугрупповой, следующим образом. Для всех $i, j \in \mathbb{N}$ пусть $\mathcal{B}(b^ia^j) = \{U_\varepsilon \mid U_e = b^iUa^j \cup b^{i-1}(]1-\varepsilon, 1[)a^{j-1}$, где $U$ – элемент базы топологии $\tau$ в точке 0 и $\varepsilon \in ]0, 1[\ \}$ – база топологии $\tau_1$ на $\mathcal{C}(S)$ в точках $b^ia^j$, а в остальных точках базы топологий $\tau_1$ и $\tau^*$ совпадают. Очевидно, что $\tau_1$ слабее $\tau^*$. Покажем, что топология $\tau_1$ на $\mathcal{C}(S)$ полугрупповая. Очевидно, что достаточно показать, что умножение в $(\mathcal{C}(S), \tau_1)$ непрерывно в следующих трех случаях:

(1) $b^ia^j \cdot b^ka^l$, $\quad i, j, k, l \in \mathbb{N}$;
(2) $b^ia^j \cdot b^ksa^l$, $\quad i, j, k, l \in \mathbb{N}$, $s \in S$;
(3) $b^ksa^l \cdot b^ia^j$, $\quad i, j, k, l \in \mathbb{N}$, $s \in S$.

Так как $(S, \tau)$ – топологическая полугруппа, то для произвольной окрестности $W(ef)$ точки $ef$ существуют окрестности $V(e)$ и $U(f)$ точек $e$ и $f$ соответственно, такие, что $V(e)U(f) \subset W(ef)$.

Рассмотрим три вышеупомянутых случая.

(1) $b^ia^j \cdot b^ka^l = \begin{cases} b^{i+k-j}a^l, & \text{если } j \le k; \\ b^ia^{l+j-k}, & \text{если } j > k. \end{cases}$

Тогда $U_\varepsilon(b^ia^j) \cdot U_\varepsilon(b^ka^l) \subset U_\varepsilon(b^ia^j \cdot b^ka^l)$.

(2) $b^ia^j \cdot b^ksa^l = \begin{cases} b^{i+k-j}sa^l, & \text{если } j \le k; \\ b^ia^{l+j-k}, & \text{если } j > k. \end{cases}$

Тогда

а) если $j \le k$, то $V_\varepsilon(b^ia^j) \cdot b^kU(s)a^l \subset b^{i+k-j}U(s)a^l$,

б) если $j > k$, то $V_\varepsilon(b^ia^j) \cdot b^kU(s)a^l \subset V_\varepsilon(b^ia^{j+l-k})$.

(3) $b^ksa^l \cdot b^ia^j = \begin{cases} b^{i+k-l}a^l, & \text{если } l < i; \\ b^ksa^{l+j-i}, & \text{если } l \ge i. \end{cases}$

Тогда

а) если $l < i$, то $b^kV(s)a^l \cdot U_\varepsilon(b^ia^j) \subset U_\varepsilon(b^{i+k-l}a^j)$;

б) если $l \ge i$, то $b^kV(s)a^l \cdot U_\varepsilon(b^ia^j) \subset b^kV(s)a^{j+l-i}$.

Непрерывность инверсии также достаточно показать в точках вида $b^ia^j$ $(i, j \in \mathbb{N})$. Имеем $(U_\varepsilon(b^ia^j))^{-1} \subset U_\varepsilon(b^ja^i)$ для произвольных $\varepsilon \in ]0,1[$ , $i, j \in \mathbb{N}$. Таким образом $(\mathcal{C}(S), \tau_1)$ – топологическая инверсная полугруппа.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Bruck R.H. *A survey of binary systems* // Ergebnisse der Math.. Heft 20, Berlin: Springer, 1958.
2. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. т.2. – М.: Мир, 1972. – 285 с.
3. Энгелькинг Р. Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.
4. Eberhart C., Selden J. *On the closure of the bicyclic semigroup* // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V.144. P.115–126.

Department of Mathematics and Mechanics, Lviv University, Universytetska 1, Lviv, 290602, Ukraine

*Поступила 2.12.1993*