Математичні студії
1993, випуск 2

УДК 519.21

ПРО ІСНУВАННЯ НАПІВГРУПИ ОПЕРАТОРІВ, ЩО ОПИСУЄ ВІНЕРІВСЬКИЙ ПРОЦЕС В НАПІВОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ З НЕКЛАСИЧНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ

Б.І. КОПИТКО

Abstract. B. Kopytko, *On existence of the operator semi-group which describes a Wiener process in a semi-bounded domain with non-classical limit conditions*, Math. Stud. **2** (1993) 94–100.

An analitical representation of an operator semi-group is obtained. This semi-group describes a Wiener process in the internal points of certain semi-bounded domain and corresponds to the given boundary conditions.

Нехай $D = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m,\ x_m > 0\}$ – область в $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, $S = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m,\ x_m = 0\}$ – границя області D, $\overline{D} = D \cup S$ – замикання області D. Припустимо, що в D розглядається дифузійний процес, керований характеристичним оператором $L = \frac{1}{2}\Delta$, де Δ – оператор Лапласа.

Поставимо задачу описати в $\overline{D}$ достатньо загальний клас неперервних марківських процесів, для яких твірний оператор у всіх внутрішніх точках збігається з L.

Шуканий клас процесів буде породжуватися напівгрупою операторів, яку в свою чергу визначимо через розв'язок наступної граничної задачі для рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial u(t,\mathbf{x})}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u(t,\mathbf{x}), \quad t \in (0,T],\ \mathbf{x} \in D, \tag{1}$$

$$u(0,\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \overline{D}, \tag{2}$$

$$q(\mathbf{x}')\frac{\partial u(t,\mathbf{x}',0)}{\partial x_m} + \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_k(\mathbf{x}')\frac{\partial u(t,\mathbf{x}',0)}{\partial x_k} + \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{m-1} \beta_{k_j}(\mathbf{x}')\frac{\partial^2 u(t,\mathbf{x}',0)}{\partial x_k \partial x_j} = 0,$$
$$t \in (0,T], \quad \mathbf{x}' \in S, \tag{3}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 60H15.

Робота виконана при частковій підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень при Державному комітеті з науки та технологій України, проект N 1/538

де $q(\mathbf{x}')$, $\alpha_k(\mathbf{x}')$, $\beta_{k_j}(\mathbf{x}')$ – обмежені неперервні функції на S такі, що $q(\mathbf{x}')$, $\alpha_k(\mathbf{x}')$ і $\beta_{k_j}(\mathbf{x}')$ задовольняють умову Гельдера на S з деяким показником α $(0 < \alpha \leq 1)$, $\inf_{\mathbf{x}'\in S} q(\mathbf{x}') > 0$, матриця $\beta(\mathbf{x}') = \left(\beta_{k_j}(\mathbf{x}')\right)_{k,j=1}^{m-1}$ – симетрична, і знайдуться сталі β_0 і β_1 такі, що для всіх $\mathbf{x}' \in S$ і будь-якого дійсного вектора $\Theta' \in S$

$$\beta_0|\Theta'|^2 \leq (\beta(\mathbf{x}')\Theta', \Theta') \leq \beta_1|\Theta'|^2.$$

Не порушуючи загальності, покладемо $q(\mathbf{x}') \equiv 1$. Відзначимо також, що умова (3) відповідає деякій частині загальної умови багатовимірних дифузійних процесів, знайденої О.Д.Вентцелем [1].

Перш ніж сформулювати теорему про існування розв'язку задачі (1)–(3), введемо поняття спеціального фундаментального розв'язку (с.ф.р.) для оператора $\dfrac{\partial}{\partial t} - L$. З цією метою означимо для $t > 0$, $\mathbf{x} \in \overline{D}$, $\mathbf{y}' \in S$ функцію $G_0^{(\mathbf{y}')}(t, \mathbf{x} - \mathbf{y}')$ за формулою

$$G_0^{(\mathbf{y}')}(t, \mathbf{x} - \mathbf{y}') = G_0^{(\mathbf{y}')}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}') = \\ = -\int_0^{\infty} d\,u \int_S \frac{\partial}{\partial u} g(t, \mathbf{x}' - \mathbf{v}', x_m + \mathbf{u}) P_0^{(\mathbf{y}')}(\mathbf{u}, \mathbf{v}' - \mathbf{y}')\, d\,\mathbf{v}', \quad (4)$$

де

$$g(t\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(t, \mathbf{x} - \mathbf{y}) = g(t, \mathbf{x}' - \mathbf{y}', x_m - y_m) = (2\pi t)^{-\frac{m}{2}} \exp\left\{-\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{2t}\right\}$$

– звичайний фундаментальний розв'язок (з.ф.р.) для оператора $\dfrac{\partial}{\partial t} - L$, $P_0^{(\mathbf{y}')}(\mathbf{u}, \mathbf{v}' - \mathbf{y}')$ - з.ф.р. для оператора

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} - \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{m-1} \beta_{k_j}(\mathbf{y}') \frac{\partial^2}{\partial v_k\, \partial v_j}.$$

Лема 1. *Функція $G_0^{(\mathbf{y}')}(t, \mathbf{x} - \mathbf{y}')$ для фіксованого $\mathbf{y}' \in S$ задовольняє по $(t, \mathbf{x})$ в області $(0, T] \times D$ рівняння (1) і $\forall \mathbf{y}' \in S$, $(t, \mathbf{x}) \in (0, T] \times \overline{D}$ має місце*

$$\frac{\partial G_0^{(\mathbf{y}')}(t, \mathbf{x} - \mathbf{y}')}{\partial x_m} + \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{m-1} \beta_{k_j}(\mathbf{y}') \frac{\partial^2 G_0^{(\mathbf{y}')}(t, \mathbf{x} - \mathbf{y}')}{\partial x_k\, \partial x_j} = \frac{\partial g(t, \mathbf{x} - \mathbf{y}')}{\partial x_m}. \quad (5)$$

Доведення леми 1 грунтується на безпосередній перевірці сформульваних тверджень.

Далі, для $t > 0$, $\mathbf{x} \in \overline{D}$, $\mathbf{y}' \in S$ означимо функцію $G_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}')$ за формулою

$$G_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}') = \int_0^t d\tau \int_S G_0^{(\mathbf{z}')}(t - \tau, \mathbf{x} - \mathbf{z}') \Phi(\tau, \mathbf{z}', \mathbf{y}')\, d\mathbf{z}', \quad (6)$$

де $\Phi(t, \mathbf{x}', \mathbf{y}')$ $(t > 0,\ \mathbf{x}', \mathbf{y}' \in S)$ – невідома функція, яку знайдемо з наступної граничної умови для функції

$$G(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}') = G_0^{(\mathbf{y}')}(t, \mathbf{x} - \mathbf{y}') + G_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}') : \quad (7)$$

$$\frac{\partial G(t,\mathbf{x}',\mathbf{y}')}{\partial x_m}+\sum_{k=1}^{m-1}\alpha_k(\mathbf{x}')\frac{\partial G(t,\mathbf{x}',\mathbf{y}')}{\partial x_k}+\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{m-1}\beta_{k_j}(\mathbf{x}')\frac{\partial^2 G(t,\mathbf{x}',\mathbf{y}')}{\partial x_k\,\partial x_j}=$$

$$=\frac{\partial g(t,\mathbf{x}'-\mathbf{y}')}{\partial x_m},\quad t\in(0,T],\quad \mathbf{x}',\mathbf{y}'\in S. \quad (8)$$

Враховуючи (5)–(7), а також твердження теореми про стрибок конормальної похідної від потенціалу простого шару [2], з (8) одержуємо рівняння для $\Phi(t,\mathbf{x}',\mathbf{y}')$:

$$\Phi(t,\mathbf{x}',\mathbf{y}')=\mu(t,\mathbf{x}',\mathbf{y}')+\int_0^t d\tau\int_S \mu(t-\tau,\mathbf{x}',\mathbf{z}')\Phi(\tau,\mathbf{z}',\mathbf{y}')d\mathbf{z}', \quad (9)$$

де

$$\mu(t,\mathbf{x}',\mathbf{y}')=\sum_{k=1}^{m-1}\alpha_k(\mathbf{x}')\frac{\partial G_0^{(\mathbf{y}')}(t,\mathbf{x}'-\mathbf{y}')}{\partial x_k}+\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{m-1}(\beta_{k_j}(\mathbf{x}')-\beta_{k_j}(\mathbf{y}'))\frac{\partial^2 G_0^{(\mathbf{y}')}(t,\mathbf{x}'-\mathbf{y}')}{\partial x_k\,\partial x_j}.$$

Рівняння (9) є інтегральним рівнянням Вольтерра II роду. Його ядро, тобто функція $\mu(t,\mathbf{x}',\mathbf{y}')$, допускає оцінку вигляду

$$|\mu(t,\mathbf{x}',\mathbf{y}')|\le K_T\,t^{-1+\frac{\alpha-\lambda}{4}}\int_0^\infty u^{-1+\frac{\lambda}{2}}e^{-C\frac{u^2}{t}-C\frac{|\mathbf{x}'-\mathbf{y}'|}{t+u}}(t+u)^{-\frac{m-1}{2}}\,du. \quad (10)$$

Тут K_T і C – деякі додатні константи, λ – доданє число таке, що $0<\lambda<\alpha\le 1$. Нерівність (10) означає, що ядро рівняння (9) має слабку інтегровність. Доведемо, що рівняння (9) має розв'язок Φ вигляду

$$\Phi(t,\mathbf{x}',\mathbf{y}')=\sum_{k=0}^{\infty}\Phi_k(t,\mathbf{x}',\mathbf{y}'), \quad (11)$$

де

$$\Phi_0(t,\mathbf{x}',\mathbf{y}')=\mu(t,\mathbf{x}',y')\ \text{ і}$$

$$\Phi_k(t,\mathbf{x}',\mathbf{y}')=\int_0^t d\tau\int_S \mu(t-\tau,\mathbf{x}',\mathbf{z}')\Phi_{k-1}(\tau,\mathbf{z}',\mathbf{y}')\,d\mathbf{z}',\quad k=1,2,\ldots$$

Це випливає з одержаних індукцією по k оцінок

$$|\Phi_k(t,\mathbf{x}',\mathbf{y}')|\le K_T\left[K_T\left(\frac{\pi}{C}\right)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{2}{C}\right)^{\frac{\lambda}{4}}\right]^k\left(\frac{\lambda}{4}k\right)^{\frac{\lambda}{4}k}\frac{\left[\Gamma\left(\frac{\alpha-\lambda}{4}\right)\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right]^{k+1}}{\Gamma\left(\frac{(\alpha-\lambda)}{2}\frac{(k+1)}{2}\right)\Gamma\left(\lambda\frac{k+1}{2}\right)}\times$$

$$\times\, t^{-1+\frac{\alpha-\lambda}{4}+\frac{\alpha}{4}k}\int_0^\infty u^{-1+\frac{\lambda}{2}}e^{-C\frac{u^2}{2t}-C\frac{|\mathbf{x}'-\mathbf{y}'|^2}{t+u}}(t+u)^{-\frac{m-1}{2}}\,du,$$

які справедливі для $t\in(0,T]$, $\mathbf{x}',\mathbf{y}'\in S$, $k=0,1,2,\ldots$. Тут K_T і C – сталі з нерівності (10).

Останні нерівності приводять до наступної оцінки розв'язку рівнянння (9):

$$|\Phi(t,\mathbf{x}',\mathbf{y}')| \le K_T\, t^{-1+\frac{\alpha-\lambda}{4}} \int_0^\infty u^{-1+\frac{\lambda}{2}} e^{-C\frac{u^2}{2t}-C\frac{|\mathbf{x}'-\mathbf{y}'|}{t+u}} (t+u)^{-\frac{m-1}{2}}\, du, \qquad (12)$$

де $t \in (0,T]$, $\mathbf{x}',\mathbf{y}' \in S$, K_T і C – деякі сталі.

З (12) і оцінки для функції $G_0^{(\mathbf{y}')}(t,\mathbf{x}-\mathbf{y}')$ $\quad (t \in (0,T],\ \mathbf{x} \in \overline{D},\ \mathbf{y}' \in S)$

$$G_0^{(\mathbf{y}')}(t,\mathbf{x}-\mathbf{y}') \le K_T\, t^{-\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{4}} e^{-C\frac{x_m^2}{t}} \int_0^\infty u^{-1+\frac{\lambda}{2}} e^{-C\frac{u^2}{t}-C\frac{|\mathbf{x}'-\mathbf{y}'|^2}{t+u}} (t+u)^{\frac{m-1}{2}}\, du \quad (13)$$

випливає існування потенціалу простого шару в (6).

При цьому має місце нерівність

$$|G_1(t,\mathbf{x},\mathbf{y}')| \le K_T\, t^{-\frac{1}{2}+\frac{\alpha-\lambda}{4}} e^{-C\frac{x_m^2}{t}} \times \int_0^\infty u^{-1+\frac{\lambda}{2}} e^{-C\frac{u^2}{t}-C\frac{|\mathbf{x}'-\mathbf{y}'|^2}{t+u}} (t+u)^{-\frac{m-1}{2}}\, du, \qquad (14)$$

де $t \in (0,T]$, $\mathbf{x} \in \overline{D}$, $\mathbf{y}' \in S$, K_T і C – деякі сталі.

Побудова функції $G_1(t,\mathbf{x},\mathbf{y}')$ завершена. Функцію $G(t,\mathbf{x},\mathbf{y}')$, яка задається співвідношенням (7), будемо називати спеціальним фундаментальним розв'язком для оператора $\dfrac{\partial}{\partial t} - L$. Ця функція для фіксованого $\mathbf{y}' \in S$ задовольняє по $(t,\mathbf{x})$ в області $(0,T] \times D$ рівняння (1) і умову (8).

Доведемо тепер наступну теорему.

Теорема 1. *Нехай $\varphi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ – двічі неперервно диференційована функція, обмежена разом зі своїми похідними. Тоді існує розв'язок задачі (2)–(4), він має вигляд*

$$u(t,\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^m} g(t,\mathbf{x},\mathbf{y})\varphi(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} + \int_0^t d\tau \int_S G(t-\tau,\mathbf{x},\mathbf{y}')V(\tau,\mathbf{y}',\varphi) d\mathbf{y}', \qquad (15)$$

де

$$V(t,\mathbf{x}',\varphi) = \int_{\mathbb{R}^m} \left[\frac{\partial g(t,\mathbf{x}',\mathbf{z})}{\partial x_m} + \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_k \frac{\partial g(t,\mathbf{x}',\mathbf{z})}{\partial x_k} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^{m-1} \beta_{k_j}(\mathbf{x}') \frac{\partial^2 g(t,\mathbf{x}',\mathbf{z})}{\partial x_k\, \partial x_j} \right] \varphi(\mathbf{z})\, d\mathbf{z}. \qquad (16)$$

Доведення. Спочатку з умови (3) визначаємо функцію V. При виведенні формули (16) суттєво використовується умова (8) і теорема про стрибок конормальної похідної від потенціалу простого шару, яка передбачає апріорі неперервність функції $V(t,\mathbf{x}',\varphi)$ для $(t,\mathbf{x}') \in [0,T] \times S$. Якщо $\varphi(\mathbf{x})$ задовольняє умову теореми 1, то неперервність функції $V(t,\mathbf{x}',\varphi)$ для $(t,\mathbf{x}') \in [0,T] \times S$ очевидна. При цьому має місце нерівність

$$|V(t,\mathbf{x}',\varphi)| \le K_T(\|\varphi'\| + \|\varphi''\|), \qquad (17)$$

де $\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(\mathbf{x})| \colon \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m\}$, K_T деяка стала.

Після того, як доведено, що $u(t,\mathbf{x})$ задовольняє (3), перейдемо до доведення (1) і (2). Справедливість (1) слідує з рівностей $\left(\dfrac{\partial}{\partial t}-L\right)g=\left(\frac{\partial}{\partial t}-L\right)G=0$. Що стосується (2), то можна довести прямування до нуля другого інтегралу в правій частині рівняння (15) для $t\to 0$ для всіх $\mathbf{x}\in\overline{D}$, якщо скористатися нерівністю (13) для функції G. Перший інтеграл в (15) збігається до $\varphi(\mathbf{x})$ за відомою властивістю функції g. Теорема 1 доведена.

Зауваження 1. Доведення єдиності побудованого в теоремі 1 розв'язку одержується з принципу максимуму для оператора $\dfrac{\partial}{\partial t}-L$.

Зауваження 2. В умовах теореми 1 розв'язок задачі (1)–(3) можна представити у вигляді (15), (16), розглядаючи при цьому перший інтеграл в правій частині (15) та інтеграл в правій частині (16) по області D.

Позначимо через $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ банахів простір всіх дійсних обмежених вимірних функцій на $\mathbb{R}^m$ з нормою $\|\varphi\|=\sup\{|\varphi(\mathbf{x})|\colon \mathbf{x}\in\mathbb{R}^m\}$. Визначимо на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ сім'ю операторів T_t, $t>0$ за формулами (15), (16). Якщо $\varphi\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, то існування потенціалу просторго шару в (15) випливає з нерівності

$$\left|\int_0^t d\tau\int_S G(t-\tau,\mathbf{x},\mathbf{y}')V(\tau,\mathbf{y}',\varphi)d\mathbf{y}'\right|\le K_T\|\varphi\|t^{-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{4}},\ t\in(0,T],\ \mathbf{x}\in\overline{D},\ \mathbf{y}'\in S, \tag{18}$$

доведення якої внаслідок громіздкості викладок ми не подаємо.

Відзначимо без доведення ще одну очевидну властивість сім'ї операторів T_t. Якщо $\varphi_n(\mathbf{x})$ така послідовність в $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, що $\varphi_n(\mathbf{x})\to\varphi(\mathbf{x})$ для кожного $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m$, коли $n\to\infty$ і $\sup_{n,\mathbf{x}}|\varphi_n(\mathbf{x})|<\infty$, то $\lim_{n\to\infty}T_t\varphi_n(\mathbf{x})=T_t\varphi(\mathbf{x})$.

Покажемо тепер, що сім'я операторів T_t утворює напівгрупу. При цьому нами будуть використані рівності

$$\int_{\mathbb{R}^m} g(t_1,\mathbf{x},\mathbf{z})g(t_2,\mathbf{z},\mathbf{y})d\mathbf{z}=g(t_1+t_2,\mathbf{x},\mathbf{y}), \tag{19}$$

$$\int_{\mathbb{R}^m} g(t_1,\mathbf{x},\mathbf{z})G(t_2,\mathbf{z},\mathbf{y}')\,d\mathbf{z}=G(t_1+t_2,\mathbf{x},\mathbf{y}'), \tag{20}$$

де $t_1,t_2>0$, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m$, $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^m$, $\mathbf{y}'\in S$.
Справедливість цих співвідношень випливає з того, що їх ліві і праві частини є розв'язками відповідної задачі Коші для рівняння (1).

Отже, нехай $t_1>0,\ t_2>0,\ \mathbf{x}\in\overline{D}$. Тоді

$$T_{t_1+t_2}\varphi(\mathbf{x})=\int_{\mathbb{R}^m} g(t_1+t_2,\mathbf{x},\mathbf{y})\varphi(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}+\int_0^{t_1+t_2}d\tau\int_S G(t_1+t_2-\tau,\mathbf{x},\mathbf{y}')V(\tau,\mathbf{y}',\varphi)d\mathbf{y}'=$$

$$=\int_{\mathbb{R}^m} g(t_1,\mathbf{x},\mathbf{z})\left[\int_{\mathbb{R}^m} g(t_2,\mathbf{z},\mathbf{y})\varphi(\mathbf{y})d\mathbf{y}+\int_0^{t_2}d\tau\int_S G(\tau,\mathbf{z},\mathbf{y}')V(t_2-\tau,\mathbf{y}',\varphi)d\mathbf{y}'\right]d\mathbf{z}+$$

$$+\int_0^{t_1}d\tau\int_S G(\tau,\mathbf{x},\mathbf{y}')V(t_1+t_2-\tau,\mathbf{y}',\varphi)d\mathbf{y}'.$$

Далі, для $t > 0$ одержуємо

$$V(t_2+t,\mathbf{x}',\varphi)=\int_{\mathbb{R}^m}\left[\frac{\partial g(t,\mathbf{x}'.\mathbf{z})}{\partial x_m}+\sum_{k=1}^{m-1}\alpha_k(\mathbf{x}')\frac{\partial g(t,\mathbf{x}',\mathbf{z})}{\partial x_k}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{m-1}\beta_{k_j}(\mathbf{x}')\frac{\partial^2 g(t,\mathbf{x}',\mathbf{z})}{\partial x_k\,\partial x_j}\right]\left(\int_{\mathbb{R}^m}g(t_2,\mathbf{z},\mathbf{y})\varphi(\mathbf{y})\,d\,y\right)d\,\mathbf{z}=V(t,\mathbf{x}',T_{t_2}\varphi),$$

оскільки

$$\int_{\mathbb{R}^m}\left[\frac{\partial g(t,\mathbf{x}',\mathbf{z})}{\partial x_m}+\sum_{k=1}^{m-1}\alpha_k(\mathbf{x}')\frac{\partial g(t,\mathbf{x}',\mathbf{z})}{\partial x_k}+\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{m-1}\beta_{k_j}(\mathbf{x}')\frac{\partial^2 g(t,\mathbf{x}',\mathbf{z})}{\partial x_k\,\partial x_j}\right]\times$$
$$\times\left[\int_0^{t_2}d\,s\int_S G(s,\mathbf{z},\mathbf{y}')V(t_2-s,\mathbf{y}',\varphi)\,d\,\mathbf{y}'\right]d\,\mathbf{z}=\int_0^{t_2}ds\int_S\left[\frac{\partial G(t+s,\mathbf{x}',\mathbf{y}')}{\partial x_m}+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{m-1}\alpha_k(\mathbf{x}')\frac{\partial G(t+s,\mathbf{x}',\mathbf{y}')}{\partial x_k}+\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{m-1}\beta_{k_j}(\mathbf{x}')\frac{\partial^2 G(t+s,\mathbf{x}',\mathbf{y}')}{\partial x_k\,\partial x_j}\right]\times$$
$$\times V(t_2-s,\mathbf{y}',\varphi)\,d\,\mathbf{y}'=0.$$

Тому

$$T_{t_1+t_2}\varphi(\mathbf{x})=\int_{\mathbb{R}^m}g(t_1,\mathbf{x},\mathbf{z})(T_{t_2}\varphi)(\mathbf{z})d\mathbf{z}+\int_0^{t_1}d\tau\int_S G(\tau,\mathbf{x},\mathbf{y}')\times$$
$$\times V(t_1-\tau,\mathbf{y}',T_{t_2}\varphi)\,d\,\mathbf{y}'=T_{t_1}(T_{t_2}\varphi)(\mathbf{x}),$$

що і потрібно було довести.

Далі, міркуваннями, аналогічними тим, які застосовувались при доведенні леми 3.1 в [3] і леми в [4], можна довести, що напівгрупа T_t залишає інваріантним конус невід'ємних функцій. Так як, очевидно, $T_t\varphi_0(\mathbf{x})\equiv 1$ для $\varphi_0(\mathbf{x})\equiv 1$, то побудована напівгрупа визначає деякий однорідний необривний марківський процес в $\overline{D}$. Враховуючи зауваження 2, робимо висновок, що побудованій напівгрупі відповідає така імовірність переходу $P(t,\mathbf{x},d\mathbf{y})$, що

$$T_t\varphi(\mathbf{x})=\int_D\varphi(\mathbf{y})P(t,\mathbf{x},d\mathbf{y}),\quad \mathbf{x}\in\overline{D}.$$

Накінець, покладаючи $\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})=|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^6$, легко одержати співвідношення

$$\sup_{\mathbf{x}\in\overline{D}}\int_D|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^6P(t,\mathbf{x},d\mathbf{y})=O(t^{3/2})$$

для $t\to 0$, звідки слідує, що побудований процес неперервний.

Таким чином доведена теорема.

Теорема 2. *Розв'язок задачі (1)–(3), побудований в теоремі 1, однозначно визначає напівгрупу операторів, що описує вінерівський процес в області D, поведінка якого при виході на границю області характеризується граничною умовою (3).*

ЛІТЕРАТУРА

1. Вентцель А.Д. О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов // Теория вероятностей и ее применения.–1959.–**4**, N. 2.–С.172–185.
2. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.– М.: Наука, 1967.–736 с.
3. Портенко Н.И. Обобщенные диффузионные процессы.– Киев: Наук. думка, 1982.–207 с.
4. Kopytko B.I. Diffusion processes with generalized drift vector and diffusion matrix // Proceed. of the sixth USSR-Japan symposium on Probab. theory and math. stat., Kiev, USSR, August 5–10, 1991; P.169–175.

Інститут математики АН України, 252601, Київ, вул.Терещенківська, 3

Надійшло 24.04.1993