

ПРО $\mathcal{P}$ -РОЗРІДЖЕНІ ПРОСТОРИ

Б.М. БОКАЛО

ABSTRACT. B. Bokalo, *On $\mathcal{P}$ -scattered spaces*, Math. Stud. **2** (1993) 73–77.

The properties of $\mathcal{P}$ -scattered spaces where $\mathcal{P}$ is the property of separability ($\mathcal{S}$ -scattered) and metrizability ($\mathcal{M}$ -scattered) are investigated. A characterization of compacta lying in a σ -product of metrizable compacta is given. In particular, it is shown that $\mathcal{S}$ -scattered Eberlein compacta are Korson compacta. It is shown that, under some restrictions, the compactum which is a finite union of its $\mathcal{M}$ -scattered subspaces is an Eberlein compactum.

В праці [6] К.Альстер показав, що кожний розріджений компакт Корсона є сильно еберлейнівським, тобто вкладається в σ -добуток дискретних двоточок. Вдосконалюючи техніку цього доведення, в даній роботі доводимо теореми, з яких, зокрема, випливає, що кожний $\mathcal{S}$ -розріджений компакт Корсона є компактом Еберлейна.

Нагадаємо [4], що простір X називається $\mathcal{P}$ -розрідженим, де $\mathcal{P}$ - деяка топологічна властивість, якщо в кожному непорожньому замкненому підпросторі $Y \subset X$ знайдеться точка y і такий її окіл U в Y , замикання якого має властивість $\mathcal{P}$. Далі, коли топологічна властивість $\mathcal{P}$ є сепарабельність, то розріджені простори називаємо $\mathcal{S}$ -розрідженими, а якщо $\mathcal{P}$ – метризовність, то $\mathcal{P}$ -розріджені простори називаємо $\mathcal{M}$ -розрідженими.

Термінологія і позначення такі як в [1,5]. Всі простори, які зустрічаються в статті, вважаємо гаусдорфовими, якщо окремо не вказуються аксіоми віддільності.

Нехай X – $\mathcal{S}$ -розріджений простір. Покладемо $X_0 = \emptyset$, $X^0 = X$, $X_1 = \bigcup\{U : U \text{ – відкритий сепарабельний підпростір простору } X^0\}$ і $X^1 = X^0 \setminus X_1$. Припустимо, що для всіх порядкових чисел $\alpha < \beta$ означені підпростори X_α і X^α простору X . Покладемо $P_\beta = \bigcap\{X^\alpha : \alpha < \beta\}$, $X_\beta = \bigcup\{U : U \text{ – відкритий сепарабельний підпростір простору } P_\beta\}$, $X^\beta = P_\beta \setminus X_\beta$ і $i_S(X) = \min\{\alpha > 0 : X_\alpha = \emptyset\}$. Порядкове число $i_S(X)$ називаємо індексом $\mathcal{S}$ -розрідженості простору X . Зрозуміло, що $X = \bigcup\{X_\alpha : \alpha < i_S(X)\}$, X_α є локально сепарабельний для кожного $\alpha < i_S(X)$, $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$ при $\alpha \neq \beta$ і $\bigcup\{X_\alpha : \alpha < \alpha'\}$ – відкрита в X множина для кожного $\alpha' < i_S(X)$.

Якщо X – компакт, то ординал $i_S(X)$ – ізолюваний. В цьому випадку через $i_S^*(X)$ позначимо такий ординал, що $i_S(X) = i_S^*(X) + 1$. Тоді $X = \bigcup \{X_\alpha : \alpha \leq i_S^*(X)\}$ і $X_{i_S^*(X)}$ – сепарабельний компакт.

Аналогічно визначається індекс $\mathcal{M}$ -розрідженості $i_{\mathcal{M}}(X)$. При цьому, $X = \bigcup \{X_\alpha : \alpha < i_{\mathcal{M}}(X)\}$, де X_α – локально метризований простір для кожного $\alpha < i_{\mathcal{M}}(X)$, $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$ якщо $\alpha \neq \beta$ і $\bigcup \{X_\alpha : \alpha < \alpha'\}$ відкрита в X для кожного $\alpha' < i_{\mathcal{M}}(X)$. Якщо X – компакт, то покладемо $i_{\mathcal{M}}^*(X) = i_{\mathcal{M}}(X) - 1$. Тоді $X = \{X_\alpha : \alpha \leq i_{\mathcal{M}}^*(X)\}$ і $X_{i_{\mathcal{M}}^*(X)}$ – метризовний компакт.

Лема 1. *Якщо $\mathcal{U}$ – точково зліченна сім'я відкритих $\mathcal{S}$ -розріджених σ -компактних підмножин простору X , то існує точково скінченна сім'я $\mathcal{V}$ відкритих в X множин така, що $\mathcal{V}$ вписана в $\mathcal{U}$ і $\bigcup \mathcal{V} = \bigcup \mathcal{U}$.*

Доведення. Скористаємось трансфінітною індукцією відносно потужності сім'ї $\mathcal{U}$. Якщо $|\mathcal{U}| = \aleph_0$, то $\bigcup \mathcal{U} \in \sigma$ -компактний підпростір і, одже, в сім'ю $\mathcal{U}$ можна вписати точково скінченну сім'ю $\mathcal{V}$ відкритих в X множин таку, що $\bigcup \mathcal{V} = \bigcup \mathcal{U}$. Припустимо, що лема виконується при $|\mathcal{U}| < \aleph_\alpha$, нехай $\mathcal{U} = \bigcup \{\mathcal{U}_\beta : \beta < \omega_\alpha\}$, де ω_α – перший ординал потужності $\aleph_\alpha$.

Введемо деякі позначення. Для кожної відкритої σ -компактної множини U зафіксуємо таку зліченну сім'ю компактів $\mathcal{F}(U) = \{F_i : i \in \mathbb{N}^+\}$, що $U = \bigcup \mathcal{F}(U)$. Для кожного $\mathcal{S}$ -розрідженого компакта F покладемо

$$d(F) = \begin{cases} F_{i_{\mathcal{S}(F)}^*}, & \text{якщо } F \neq \emptyset \\ \emptyset, & \text{якщо } F = \emptyset. \end{cases}$$

Якщо $\mathcal{K}$ – сім'я $\mathcal{S}$ -розріджених компактів, то покладемо $\mathcal{D}(\mathcal{K}) = \{d(\cap \mathcal{K}') : \mathcal{K}' \in \text{Exp}_{<\aleph_0}(\mathcal{K})\}$.

Означимо зростаючу послідовність $\{\mathcal{U}_\beta : \beta < \omega_\alpha\}$ підсімей сім'ї $\mathcal{U}$ наступним чином:

$$\mathcal{U}_\eta = \bigcup \{U_\beta : \beta \leq \eta\} \cup \{U \in \mathcal{U} : U \cap (\bigcup \mathcal{D}(\bigcup \{\mathcal{F}(V) : V \in \mathcal{U}_\lambda\})) \neq \emptyset\},$$

якщо $\eta = \lambda + 1$ і $\mathcal{U}_\eta = \bigcup \{U_\beta : \beta < \eta\}$, якщо η – граничний ординал. Очевидно, $\bigcup \{U_\beta : \beta < \omega_\alpha\} = \mathcal{U}$. Зрозуміло також, що $|\mathcal{D}(\bigcup \{\mathcal{F}(U) : U \in \mathcal{U}_\eta\})| \leq |\mathcal{U}_\eta| \cdot \aleph_0$. Оскільки сім'я $\mathcal{U}$ точково зліченна і кожний елемент сім'ї $\mathcal{D}(\bigcup \{\mathcal{F}(U) : U \in \mathcal{U}_\eta\})$ є сепарабельним простором, то $|\{U \in \mathcal{U} : U \cap (\bigcup \{\mathcal{F}(V) : V \in \mathcal{U}_\lambda\}) \neq \emptyset\}| \leq |\lambda| \cdot \aleph_0$. Тому, для кожного $\beta < \omega_\alpha$ потужність сім'ї $\mathcal{U}_\beta$ не більша за $|\beta| \cdot \aleph_0$.

Покладемо $\mathcal{W}_\beta = \mathcal{U}_{\beta+1} \setminus U_\beta$, для кожного $\beta < \omega_\alpha$. Зрозуміло, що $\bigcup \mathcal{W}_\beta = \mathcal{U}$ і $|\mathcal{W}_\beta| < \aleph_\alpha$ для кожного $\beta < \omega_\alpha$. За індуктивним припущенням, в сім'ю $\mathcal{W}_\beta$ можна вписати таку точково скінченну сім'ю $\mathcal{V}_\beta$ відкритих в X множин, що $\bigcup \mathcal{V}_\beta = \bigcup \mathcal{W}_\beta$. Покладемо $\mathcal{V} = \bigcup \{\mathcal{V}_\beta : \beta < \omega_\alpha\}$. Легко бачити, що $\mathcal{V}$ вписана в $\mathcal{U}$ і, що $\bigcup \mathcal{V} = \bigcup \mathcal{U}$. Покажемо, що сім'я $\mathcal{V}$ – точково скінченна. Досить показати, що, якщо $W_i \in \mathcal{W}_{\beta_i}$, де $\beta_1 < \beta_2 < \dots$, то $\bigcap W_i = \emptyset$. Припустимо протилежне. Нехай $x \in \bigcap \{W_i : i \in \mathbb{N}^+\}$. Для кожного W_i зафіксуємо таке $F_i \in \mathcal{F}(W_i)$, що $x \in \bigcap \{F_i : i \in \omega\}$. Покладемо $C_n = \bigcap \{F_i : i \in \omega\}$. Тоді $i_{\aleph_0}^*(C_{n+1}) \leq i_{\aleph_0}^*(C_n)$ для кожного $n \in \mathbb{N}^+$. Тому існує таке $m \in \mathbb{N}^+$, що $i_{\aleph_0}^*(C_n) = i_{\aleph_0}^*(C_m)$ для всіх $n > m$. Із означення m випливає, що $W_{m+2} \cap d(F_1 \cap \dots \cap F_m) \supset d(F_1 \cap \dots \cap F_{m+2}) \neq \emptyset$. Тому $W_{m+2} \in \mathcal{W}_{\beta_{m+1}}$. А це суперечить тому, що $W_{m+2} \in \mathcal{W}_{\beta_{m+2}}$, де $\beta_m + 2 > \beta_{m+1}$.

Нагадаємо, що простір X називається металіндельфовим (метакомпактним), якщо в кожне відкрите покриття можна вписати точково зліченне (точково скінченне) відкрите покриття.

Лема 2 [7]. Нехай $\mathcal{B}$ – база металіндельоффового (σ -метакомпактного, метакompактного) локально компактного простору X . Тоді з $\mathcal{B}$ можна виділити підпокриття $\mathcal{B}'$ простору X таке, що сім'я $\{[B] : B \in \mathcal{B}'\}$ – точково зліченна (відповідно, σ -точково скінченна, точково скінченна).

Теорема 1. Для кожного $\mathcal{S}$ -розрідженого локально компактного простору X наступні умови рівносильні:

- a) X – металіндельоффовий;
- b) X – метакомпактний.

Доведення. Імплікація b) $\Rightarrow$ a) очевидна. Покажемо, що a) $\Rightarrow$ b). Оскільки простір X – локально компактний і $\mathcal{S}$ -розріджений, то в X існує база $\mathcal{B}$, яка складається з відкритих $\mathcal{S}$ -розріджених σ -компактних множин. Тому за лемою 2, в довільне відкрите покриття $\mathcal{U}$ простору X можна вписати точково зліченне покриття простору X , яке складається з відкритих $\mathcal{S}$ -розріджених σ -компактних множин. Залишилось застосувати лему 1.

Лема 3 [9]. Компакт X гомеоморфно вкладається в σ -добуток метризовних компактів тоді і лише тоді, коли існує T_0 -розділяюча система відкритих F_σ -множин, яку можна записати таким чином: $\{U_{\alpha,n} : n \in \omega, \alpha \in A\}$, де сім'я $\{U_\alpha = \bigcup \{U_{\alpha,n} : n \in \omega\} : \alpha \in A\}$ – точково зліченна.

Теорема 2. Якщо компакт K гомеоморфно вкладається в σ -добуток регулярних $\mathcal{P}$ -розріджених просторів, де властивість $\mathcal{P}$ локально наслідкова по замкнених множинах і скінченно мультиплікативна, то компакт K є $\mathcal{P}$ -розрідженим.

Доведення. Нехай $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ – сім'я регулярних $\mathcal{P}$ -розріджених просторів, $x^* \in X = \prod \{X_\alpha : \alpha \in A\}$, $\sigma = \{x \in X : |\{\alpha \in A : x_\alpha \neq x_\alpha^*\}| < \aleph_0\}$ і $K \subset \sigma$. Очевидно, $\sigma = \bigcup \{\sigma_n : n \in \mathbb{N}^+ \cup \{0\}\}$, де $\sigma_n = \{x \in X : |\{\alpha \in A : x_\alpha \neq x_\alpha^*\}| \leq n\}$. Зрозуміло, що $\sigma_n = \sigma_0 \cup \bigcup \{\sigma_i \setminus \sigma_{i-1} : i \leq n\}$. Для кожної $B \subset A$ покладемо $\mathcal{U}_B = \{x \in X : x_\alpha = x_\alpha^* \text{ для всіх } \alpha \notin B\}$. Простір $\sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$ є вільною сумою своїх підпросторів $\{(\sigma_i \setminus \sigma_{i-1}) \cap \mathcal{U}_B : B \subset A \text{ і } |B| = i\}$. Але простір $\mathcal{U}_B$ є $\mathcal{P}$ -розрідженим для кожної скінченної $B \subset A$, оскільки $\mathcal{U}_B$ гомеоморфний простору $\prod \{X_\alpha : \alpha \in B\}$ (див. [3]). Таким чином, простір $\sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$ є вільною сумою $\mathcal{P}$ -розріджених просторів, і тому сам є $\mathcal{P}$ -розрідженим.

Нехай F – непорожня замкнена підмножина компакта K . Очевидно, $F = \bigcup \{\sigma_n \cap F : n \in \mathbb{N}^+ \cup \{0\}\}$. Оскільки F компакт і для кожного $n \in \mathbb{N}^+ \cup \{0\}$ множина $\sigma_n \cap F$ замкнена в F , то існує непорожня відкрита в F множина U така, що $U \subset \sigma_{n_0} \cap F$ для деякого $n_0 \in \mathbb{N}^+$. Можна вважати, що $U \cap (\sigma_{n_0} \setminus \sigma_{n_0-1}) = \emptyset$. Так як $\sigma_{n_0} \setminus \sigma_{n_0-1}$ є $\mathcal{P}$ -розрідженим простором і $\mathcal{P}$ -розрідженість наслідкується як замкненими так і відкритими підпросторами, то $U \cap (\sigma_{n_0} \setminus \sigma_{n_0-1})$ – непорожній відкритий в F $\mathcal{P}$ -розріджений підпростір. Тому існує непорожня відкрита в F множина V така, що $V \subset [V]_F \subset U \cap (\sigma_{n_0} \setminus \sigma_{n_0-1})$ і $[V]_F$ володіє властивістю $\mathcal{P}$.

Теорема 3. Для кожного компакта X наступні умови рівносильні:

- a) X – $\mathcal{S}$ -розріджений компакт Корсона;
- b) X – $\mathcal{M}$ -розріджений компакт і підпростір $X \setminus K$ – металіндельоффовий для кожного метризовного компакта $K \subset X$;
- в) X гомеоморфно вкладається в σ -добуток метризовних компактів.

Доведення. Відомо, що кожний компакт Корсона монолітний (див. [1]), тобто для кожного $A \subset X$ підпростір A має сітку, потужність якої не більша потужності множини A . Також відомо, що компакт Корсона наслідково металіндельфовий. Як легко бачити, кожний монолітний $\mathcal{S}$ -розріджений компакт – $\mathcal{M}$ -розріджений. З цих зауважень випливає імплікація а) $\Rightarrow$ б).

Покажемо, що в) $\Rightarrow$ а). Якщо компакт вкладається в σ -добуток метризовних компактів, то цей компакт є компактом Корсона і $\mathcal{M}$ -розрідженим (див. теорему 2), тим більше $\mathcal{S}$ -розрідженим.

Залишилось показати, що б) $\Rightarrow$ в). Застосуємо трансфінітну індукцію відносно $i_{\mathcal{M}}^*(X)$. Якщо $i_{\mathcal{M}}^*(X) = 0$, то X – метризовний компакт. Припустимо, що імплікація справедлива для всіх X таких, що $i_{\mathcal{M}}^*(X) < \beta$ і нехай $i_{\mathcal{M}}^*(X) = \beta$. Тоді за теоремою 1 і лемою 2, простір $X \setminus X_{i_{\mathcal{M}}^*(X)}^*$ можна покрити точково скінченною сім'єю $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ відкритих в X F_σ -множин такою, що $[U_\alpha] \cap X_{i_{\mathcal{M}}^*(X)}^* = \emptyset$ для кожного $\alpha \in A$. Зрозуміло, що $i_{\mathcal{M}}^*(\bar{U}_\alpha) < i_{\mathcal{M}}^*(X)$. Значить, за індуктивним припущенням, кожна $\bar{U}_\alpha$ вкладається в σ -добуток метризовних компактів. Для кожного $\alpha \in A$ зафіксуємо систему $U_\alpha = \{V_{\beta,n}^\alpha : \beta \in B, n \in \omega\}$ відкритих F_σ -множин, яка T_0 -розділяє точки множини і кожна B така, що система $\{V_\beta^\alpha = \cup\{V_{\beta,n}^\alpha : n \in \omega\} : \beta \in B\}$ точково скінченна. Це можна зробити за лемою 3. Оскільки $X_{i_{\mathcal{M}}^*(X)}^*$ – метризовний компакт, то існує зліченна сім'я $\tilde{\mathcal{V}}$ відкритих F_σ -множин в X , яка T_0 -розділяє точки простору $X_{i_{\mathcal{M}}^*(X)}^*$. Покладемо $\mathcal{V} = \cup\{V_\alpha : \alpha \in A\} \cup \tilde{\mathcal{V}}$. Очевидно, що сім'я $\mathcal{V}$ задовольняє умови леми 3. Одже, компакт X гомеоморфно вкладається в σ -добуток метризовних компактів.

Наслідок 1. *Кожний $\mathcal{S}$ -розріджений компакт Корсона є компактом Еберлейна.*

Теорема 4. *Якщо регулярний зліченно компактний простір X є об'єднанням скінченної сім'ї своїх $\mathcal{M}$ -розріджених просторів, то простір X – $\mathcal{M}$ -розріджений.*

Доведення. Міркуємо за індукцією. Якщо число доданків рівне одиниці, то X – $\mathcal{M}$ -розріджений. Припустимо, що теорема виконується для всіх регулярних зліченно компактних просторів, які можна зобразити у вигляді менше ніж $n \in \mathbb{N}^+$ своїх $\mathcal{M}$ -розріджених підпросторів. Нехай $X = \cup\{X_i : i \leq n\}$, де X_i – $\mathcal{M}$ -розріджені підпростори X для всіх $i \leq n$. Досить показати, що в X є непорожня відкрита метризовна множина. Якщо існує таке $i_0 < n$, що $[X_{i_0}] \neq X$, то знайдеться така непорожня відкрита в X множина U , що $[U] \subset \cup\{X_i : i \leq n \text{ і } i \neq i_0\}$. Тоді, за індуктивним припущенням, існує непорожній метризовний відкритий в $[U]$ підпростір V . Очевидно, $V \cap U \neq \emptyset$ і $V \cap U$ – відкритий метризовний підпростір X . Припустимо тепер, що $[X_i] = X$ для всіх $i \leq n$. В кожному $X_i, i \leq n$, зафіксуємо відкритий всюди щільний метризовний підпростір U'_i і відкриту в X множину U_i таку, що $U_i \cap X_i = U'_i$. Тоді $U = \cap\{U_i : i \leq n\}$ – непорожня відкрита в X множина і $U \subset \cup\{U'_i : i \leq n\}$. За регулярністю X , існує непорожня відкрита в X множина V , для якої $[V] \subset U$. Тоді V є об'єднанням метризовних підпросторів $U'_1 \cap V, \dots, U'_n \cap V$. Для кожного $i \leq n$ зафіксуємо σ -дискретну базу $\mathcal{B}'_i$ простору $U'_i \cap V$, і покладемо $\mathcal{B}_i = \{U \subset V : U \text{ – відкрита в } [V] \text{ і } U \cap (U'_i \cap V) \in \mathcal{B}'_i\}$. Легко перевірити, що $\mathcal{B} = \cup_{i=1}^n \mathcal{B}_i$ – точково зліченна псевдобаза простору V . Залишилося застосувати теорему 2.1.14 [5].

Відомо [8], що, якщо компакт X є об'єднанням двох метризовних підпросторів, то X – компакт Еберлейна. Існують компакти, які не є компактами Еберлейна, але є об'єднанням трьох метризовних підпросторів. Проте, має місце

Теорема 5. *Якщо компакт X можна зобразити як об'єднання скінченної сім'ї $\mathcal{M}$ -розріджених підпросторів і простір $X \setminus K$ металіндельофівий для кожного метризовного компакта $K \subset X$, то X вкладається в σ -добуток метризовних компактів і тим більше є компактом Еберлейна.*

Доведення безпосередньо випливає з теорем 3 і 4.

Л І Т Е Р А Т У Р А

1. Архангельский А.В. Топологические пространства функций.– М.: МГУ, 1989.
2. Архангельский А.В. Строение и классификация топологических пространств и кардинальные инварианты // УМН. 1978. Т.33, вып.6. С.29-84.
3. Бокало Б.М. Про деякі властивості дотикання топологій розріджених просторів // Вісник Львів. ун-ту. 1989, вип.32. С.65-67.
4. Чобан М.М., Додон Н.К. Теория $\mathcal{P}$ -разреженных пространств. Кишинев: Штиинца, 1979.
5. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
6. Alster K. Some remarks on Eberlein compacte // Fund. Math. 1979. V.104, N.1. P.43-46.
7. Gruenhage G. Covering properties on $X^2 \setminus \Delta$, w -sets, and compact subsets of Σ -products // Topol. and Appl. 1984. V.17, N.3. P.287-304.
8. Michael E., Rudin M.E. Another note on Eberlein compacts // Pacif. J. Math. 1977. V.72, N.2. P.497-499.
9. Nachmanson L.V., Yakovlev N.N. On compact sets lying in σ -products // Convent. Math. Univ. Carolinae. 1981. V.22. P.247-261.

Department of Mechanics and Mathematics, Lviv University, Universytetska 1, Lviv, 290602, Ukraine

Надійшло 30.12.1992