

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ГРАНИЧНИЙ ОПЕРАТОР ДРУГОГО ПОРЯДКУ В ПРОСТОРІ ВЕКТОР-ФУНКЦІЙ, АСОЦІЙОВАНИЙ З КВАДРАТИЧНОЮ ФОРМОЮ

О.Г. Сторож

ABSTRACT. O. Storozh, *Second order differential-boundary operator in vector-function space, associated with quadratic form*, Math. Stud. **2** (1993) 59–63.

Applying the methods of the extension theory of positively determined operators in the Hilbert space, the conditions of coersitivity for given quadratic form π are established and a differential boundary operator T associated with the form π is constructed. These conditions ensure existence and uniqueness of solution of variational problem $\pi(u, u) - 2 \operatorname{Re}(u|f) \rightarrow \min$ and its equivalence to the equation $Tu = f$.

Нехай H_0 - сепарабельний гільбертів простір, $\mathcal{B}(H_0)$ - алгебра лінійних неперервних операторів $H_0 \rightarrow H_0$, $H^i = H^i(H_0; (0, 1))$, $i = 0, 1, 2$. Припустимо, що для будь-якого $x \in [0, 1]$ $p(x) = p(x)^* \in \mathcal{B}(H_0)$, $p(x) \geq a^2 id_{H_0}$ ($a > 0$), причому оператор-функція $p(x)$ неперервна в сильному сенсі. Далі, нехай $\beta_{ij} \in \mathcal{B}(H_0)$, $i, j = 1, 2$, $\beta_{11} = \beta_{11}^*$, $\beta_{22} = \beta_{22}^*$, $\beta_{12} = \beta_{21}^*$, а Φ_1 , Φ_2 - компактні оператори $H^0 \rightarrow H_0$. Покладемо:

$$\begin{aligned} \forall u, v \in H^1 \quad \pi(u, v) = & \int_0^1 [(u'(x)|v'(x)) + (p(x)u(x)|v(x))] dx + \\ & (\beta_{11}u(0)|v(0)) + (\beta_{12}u(1)|v(0)) + (\beta_{21}u(0)|v(1)) + (\beta_{22}u(1)|v(1)) + \\ & (\Phi_1 u|v(0)) + (\Phi_2 u|v(1)) + (u(0)|\Phi_1 v) + (u(1)|\Phi_2 v), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\forall u \in H^1 \quad J[u] = \pi(u, u) - 2 \operatorname{Re} \int_0^1 (u(x)|v(x)) dx \quad (2)$$

(f - фіксований елемент з $H^0 = L_2(H_0, (0, 1))$).

У цій роботі розв'язано задачу про мінімум квадратичного функціонала J :

$$J[u] \rightarrow \min, \quad u \in H^1. \quad (3)$$

Конкретніше, побудовано оператор T (типу, вказаного у заголовку) такий, що задача (3) еквівалентна рівнянню $Tu = f$, а також вказано умови, які гарантують існування та єдиність розв'язку. При цьому використовуються деякі факти з теорії розширень додатно визначених операторів, із встановлення яких ми почнемо.

1. Нехай L_0 - замкнений додатно визначений лінійний оператор з областю визначення $D(L_0)$, щільною в гільбертовому просторі H , а $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ - позитивний простір граничних значень цього оператора, що відповідає його розширенню за Фрідріхсом L_F (означення – див. [1,2]), $H_F = D(L_F^{1/2}0)$ – енергетичний простір оператора L_F , а $\pi_F(u, v) = (L_F^{1/2}u | L_F^{1/2}v)$ – відповідний енергетичний скалярний добуток (див, [3,4]), $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ - додатно визначений оператор,

$$D(L_B) = \ker(\Gamma_1 - B\Gamma_2), \quad L_B \subset L_0^*. \quad (4)$$

Відомо [1,2], що L_B - додатно визначений самоспряжений оператор, тому має зміст задача про знаходження його енергетичного простору H_B та відповідного енергетичного скалярного добутку $\pi_B(u, v)$.

Перш ніж її розв'язувати, введемо деякі позначення. А саме, нехай $\mathcal{P}$ - проектор $D(L_0^*) \rightarrow D(L_F)$, що відповідає встановленому в [5] розкладу $D(L_0^*) = D(L_F) + \ker L_0^*$. Відомо [6], що

$$\mathcal{P}y = y - Z\Gamma_2y, \quad (5)$$

де $Z = (\Gamma_1 L_F^{-1})^*$, або, що еквівалентно, Za - розв'язок рівняння $L_0^*u = 0$ такий, що $\Gamma_2u = a$.

Теорема 1.

- а) $H_B = H_F \oplus_{\pi_B} \ker L_0^*$; (6)
- б) проектор $\mathcal{P}$ продовжується неперервним чином до π_B - ортопроектора $\hat{\mathcal{P}} : H_B \rightarrow H_F$;
- в) оператор Γ_2 однозначно продовжується до неперервного відображення $\hat{\Gamma}_2 : H_B \rightarrow \mathcal{H}$;
- г) $\forall u, v \in H_B$

$$\pi_B(u, v) = \pi_F(\hat{\mathcal{P}}u, \hat{\mathcal{P}}v) + (B\hat{\Gamma}_2u | \hat{\Gamma}_2v)_{\mathcal{H}} = \pi_B(\hat{\mathcal{P}}u, \hat{\mathcal{P}}v) + \pi_B(Z\hat{\Gamma}_2u, Z\hat{\Gamma}_2v). \quad (7)$$

Доведення ґрунтується на таких допоміжних твердженнях.

$$\text{ЛЕМА 1. } H_F + D(L_B) \subset H_B. \quad (8)$$

$$\text{ЛЕМА 2. } H_F + D(L_B) = H_F \dot{+} \ker L_0^*. \quad (9)$$

$$\text{ЛЕМА 3. } \overline{H_F \dot{+} \ker L_0^*} = H_B. \quad (10)$$

(тут і далі мається на увазі замикання відносно скалярного добутку π_B).

Справді, з (8) і (9) випливає, що $H_F \dot{+} \ker L_0^* \subset H_B$. З іншого боку, $D(L_B) \subset H_F \dot{+} \ker L_0^*$ (див. (9)), тому $H_B = \overline{D(L_B)} \subset \overline{H_F \dot{+} \ker L_0^*}$.

Наслідок 1. $H_B = \overline{H_F + D(L_B)}$.

Лема 4. Для будь-яких $u_1, v_1 \in H_F$, $u_2, v_2 \in D(L_B)$

$$\pi_B(u_1 + u_2, v_1 + v_2) = \pi_F(u_1 + \mathcal{P}u_2, v_1 + \mathcal{P}v_2) + (L_B u_2 | Z\Gamma_2 v_2), \quad (11)$$

$$(L_B u_2 | Z\Gamma_2 v_2) = (B\Gamma_2 u_2 | \Gamma_2 v_2)_{\mathcal{H}} \quad (12)$$

Справедливість формули (11) випливає з співвідношень

$$\begin{aligned}\pi_B(u_1, v_1) &= \pi_F(u_1, v_1) = (L_F^{1/2} u_1 | L_F^{1/2} v_1), \\ \pi_B(u_1, v_2) &= (u_1 | L_B v_2), \quad \pi_B(u_2, v_1) = (L_B u_2 | v_1), \\ \pi_B(u_2, v_2) &= (L_B u_2 | v_2) = (L_F \mathcal{P} u_2 | \mathcal{P} u_2 | \mathcal{P} v_2) + (L_B u_2 | Z \Gamma_2 v_2)\end{aligned}$$

(для доведення останнього з них використовуються результати праці [2] і рівність (6)). Формула (12) є наслідком встановлених в [6] рівностей $L_0^* Z = 0$, $\Gamma_2 Z = id_{\mathcal{H}}$, $\Gamma_1 Z = 0$.

Лема 5. Нехай $\hat{\mathcal{P}}$ - проектор $H_F \dot{+} \ker L_0^* \rightarrow H_F$ паралельно $\ker L_0^*$,

$$\hat{\Gamma}_2 u = \begin{cases} 0, & u \in H_F, \\ \Gamma_2 u, & u \in \ker L_0^*. \end{cases}$$

Для будь-яких $u, v \in H_F \dot{+} \ker L_0^*$ $\pi_B(u, v) = \pi_F(\hat{\mathcal{P}}u, \hat{\mathcal{P}}v) + (B\hat{\Gamma}_2 u | \Gamma_2 v)_{\mathcal{H}}$, зокрема H_F та $\ker L_0^*$ взаємно ортогональні відносно π_B і $H_B = H_F \oplus \ker L_0^*$.

Лема 6. $\ker L_0^*$ - простір, повний відносно норми, породженої скалярним добутком π_B .

Лема 7. Оператори $\hat{\mathcal{P}}$ та $\hat{\Gamma}_2$, введені в лемі 5, задовольняють умови теореми 1.

ЗАУВАЖЕННЯ. Теорему 1 можна довести використовуючи результати, викладені в [7] або [8].

2. Нехай $\Gamma_1, \Gamma_2, Z, \mathcal{P}$ такі ж, як і в п. 1, $B = B^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, а $\Phi : H \rightarrow \mathcal{H}$ - компактний оператор. Покладемо

$$\begin{aligned}D(\tilde{L}_B) &= \{u \in D(L_0^*) : \Gamma_1 u - B\Gamma_2 u = \Phi u\}, \\ \tilde{L}_B u &= L_0^* u + \Phi^* \Gamma_2 u, \quad u \in D(\tilde{L}_B), \\ \psi &= 2 \operatorname{Re}(\Phi Z) - \Phi L_F^{-1} \Phi^*, \quad \tilde{\Gamma}_1 = (\Gamma_1 - \Phi) + \Psi \Gamma_2.\end{aligned}$$

В праці [9] встановлено, що $(\mathcal{H}, \tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2)$ є позитивним простором граничних значень оператора $\tilde{L}_0 = \tilde{L}_B | \ker \Gamma_2$, що відповідає його розширенню за Фрідріхсом і що $\tilde{L}_B$ є максимально невід'ємним тоді і тільки тоді, коли $B + \Psi$ невід'ємний. Крім цього, безпосередня перевірка показує, що умова $\tilde{L}_B^{-1} \in \mathcal{B}(H)$ рівносильна умові $(B + \Psi)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Враховуючи ці факти і застосовуючи теорему 1 до оператора $\tilde{L}_0$, бачимо, що має місце

Теорема 2. Припустимо, що оператор

$$\tilde{B} = B + 2 \operatorname{Re}(\Phi Z) - \Phi L_F^{-1} \Phi^* \quad (13)$$

додатно визначений. Тоді $\tilde{L}_B$ є самоспряженим додатно визначеним оператором з енергетичним простором $\tilde{H}_B = H_B$ і енергетичним скалярним добутком

$$\tilde{\pi}_B(u, v) = \pi_B(u, v) + (\Phi u | \Gamma_2 v) + (\hat{\Gamma}_2 u | \Phi v)_{\mathcal{H}}. \quad (14)$$

Наслідок 2. Припустимо, що оператор $\tilde{B}$, означений згідно з (13), додатно визначений. Тоді для будь-якого $f \in H$ варіаційна задача

$$\tilde{\pi}_B(u, u) - 2 \operatorname{Re}(f|u) \rightarrow \min, \quad u \in \tilde{H}_B$$

має єдиний розв'язок $u_0 = \tilde{L}_B^{-1} f$.

3. Використаємо сформульовані вище твердження для розв'язання варіаційної задачі (3). Для цього розглянемо оператор T , область визначення $D(T)$ якого складається з усіх $u \in H^2$, які задовольняють умови

$$\begin{cases} -u'(0) + \beta_{11}u(0) + \beta_{12}u(1) + \Phi_1 u = 0 \\ u'(1) + \beta_{21}u(0) + \beta_{22}u(1) + \Phi_2 u = 0 \end{cases} \quad (15)$$

а закон дії такий:

$$Tu = -u'' + p(x)u + \Phi_1^* u(0) + \Phi_2^* u(1), \quad u \in D(T). \quad (16)$$

Далі, позначимо через $\omega_1(x), \omega_2(x)$ операторнозначні розв'язки рівняння $-Y'' + p(x)Y = 0$ такі, що $\omega_1(0) = \omega_2(1) = id_{H_0}$, $\omega_1(1) = \omega_2(0) = 0$, а через L_0 – мінімальний оператор, породжений в H^0 диференціальним виразом $l[u] = -u'' + p(x)u$. Неважко довести, що $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$, де

$$\mathcal{H} = H_0 \oplus H_0, \quad \Gamma_1 u = \begin{pmatrix} u'(0) \\ -u'(1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \omega'_1(0) & \omega'_2(0) \\ -\omega'_1(1) & -\omega'_2(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 u = \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \end{pmatrix},$$

є позитивним простором граничних значень оператора L_0 , що відповідає його жорсткому (тобто, фрідріхсівському) розширенню L_F , яке збігається зі звуженням оператора L_0^* на множину $\{u \in D(L_0^*): u(0) = u(1) = 0\}$. Таким чином, для дослідження оператора T можна використовувати результати п. 2 при

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \omega'_1(0) & \omega'_2(0) \\ -\omega'_1(1) & -\omega'_2(1) \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$\Phi Z = \begin{pmatrix} \Phi_1 \omega_1 & \Phi_1 \omega_2 \\ \Phi_2 \omega_1 & \Phi_2 \omega_2 \end{pmatrix}, \quad \Phi L_N^{-1} \Phi^* = \begin{pmatrix} \Phi_1 L_F^{-1} \Phi_1^* & \Phi_1 L_F^{-1} \Phi_2^* \\ \Phi_2 L_F^{-1} \Phi_1^* & \Phi_2 L_F^{-1} \Phi_2^* \end{pmatrix} \quad (18)$$

Теорема 3. Припустимо, що оператор (13), де $\beta, \Phi Z, \Phi L_F^{-1} \Phi^*$ – такі, як в (17)–(18), є додатно визначеним. Тоді T – самоспряжений додатно визначений оператор з енергетичним простором H^1 та енергетичним скалярним добутком $\pi(u, v)$ (див. [1]).

Доведення. Позначимо через $H_F, H_T, \pi_F(\cdot, \cdot), \pi_T(\cdot, \cdot)$ – енергетичні простори операторів L_F і T та їх енергетичні скалярні добутки відповідно. Оскільки $H_F = H_0^1(H_0, (0, 1))$, то з теореми 2 випливає, що $H_T = H_0^1(H_0, (0, 1)) \dot{+} \ker L_0^* = H^1$. Далі, для будь-яких $u, v \in H_F$

$$\pi_F(u, v) = \int_0^1 [(u'(x)|v'(x)) + (p(x)u(x)|v(x))] dx, \quad (19)$$

тому $\pi_T(u, v) = \pi(u, v)$. Це випливає з (7), (14), (19) і з того, що в умовах даної теореми $\hat{P}u = u - \omega_1(x)u(0) - \omega_2(x)u(1)$, $(\Phi u|\hat{\Gamma}_2 v)_{\mathcal{H}} = (\Phi_1 u|v(0))_{H_0} + (\Phi_2 u|v(1))_{H_0}$.

Наслідок 3. *В умовах теореми 3 для будь-якого $f \in H^0$ варіаційна задача (3) має єдиний розв'язок $u_0 = T^{-1}f$.*

Л І Т Е Р А Т У Р А

1. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.— Киев: Наук. думка, 1984.—283 с.
2. Кочубей А.Н. Про розширення додатно визначеного симетричного оператора // Доп. АН УРСР. Сер. А.—1979.—N 3.—С.168–170.
3. Рид., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.2. Гармонический анализ. Самосопряженность.—М.: Мир. 1978.—400 с.
4. Михлин С.Г. Курс математической физики.— М.: Наука, 1968.—576 с.
5. Крейн М.Г. Теория самосопряженных расширений полуограниченных операторов // Мат. сб.—1947.—20, N. 3.—С.431–495.
6. Лянце В.Э., Сторож О.Г. Методы теории неограниченных операторов.— Киев: Наук. думка, 1983.—212 с.
7. Бирман М.Ш. К теории самосопряженных расширений положительно определенных операторов // Мат. сб.—1956.—38, N. 4.—С.431–450.
8. Маламуд М.М. О некоторых классах расширений эрмитова оператора с лакунами // Укр. мат. журн.—1992.—44, N. 2.—С.215–233.
9. Сторож О.Г. Экстремальные расширения неотрицательного оператора и аккретивные граничные задачи // Укр. мат. журн.—1990.— 42, N. 6.—С.858–860.
10. Рофе-Бекетов Ф.С. О самосопряженных расширениях дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций // Теория функций, функц. анализ и их приложения.— 1969.—N.8.—С.3–24.
11. Деркач В.А., Макламуд М.М. Характеристические функции почти разрешимых расширений эрмитовых операторов // Укр. мат. журн.— 1992.—44, N.4—С.435–459.
12. Storozh O.G. On minimization of quadratic form inducing differential-boundary operator // Те-зи Міжнародної математичної конференції, присвяченої 100-річчю народження С.Банаха, (6-8 травня 1992 р.).—Львів, 1992—С.40.

Department of Mechanics and Mathematics, Lviv University, Universytetska 1, Lviv, 290602, Ukraine

Надійшло 8.12.1992