

СПРОСТУВАННЯ ОДНІЄЇ ГІПОТЕЗИ ШАХА ПРО ОДНОЛИСТІ ФУНКЦІЇ

М.М. Шеремета

ABSTRACT. M.M. Sheremeta, *Disproving of a Shash hypothesis concerning univalent functions*, Math. Stud. **2** (1993) 46–48.

It is disproved the following Shah conjecture: if for an increasing sequence (n_p) such that $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{n_p} = \infty$ a function f and all its derivatives $f^{(n_p)}$ are univalent in $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$, then f is an entire function. A necessary and sufficient condition is given that for every univalent in $\mathbb{D}$ function f the univalence of all the derivatives $f^{(n_p)}$ implies that f is entire.

1. Нехай (n_p) – зростаюча послідовність натуральних чисел, а функція f і всі її похідні $f^{(n_p)}$ однолисті в крузі $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$. С.М.Шах [1] висловив припущення, що якщо $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{n_p} = \infty$, то f – ціла функція. Ця гіпотеза була в 1976 р. повторена на конференції з теорії функцій комплексної змінної в Нью-Йорку та увійшла в список задач, складений С.С.Міллером [2]. Нижче гіпотеза Шаха буде спростована і буде вказана необхідна і достатня умова на (n_p) для того, щоб для кожної функції f з однолистості $f^{(n_p)}$ в $\mathbb{D}$ для всіх $p \in \mathbb{Z}_+$, $n_0 = 0$, випливало, що f – ціла функція.

2. Такою є умова

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left\{ \ln n_p - \frac{1}{n_p} \sum_{j=1}^p (n_j - n_{j-1}) \ln(n_j - n_{j-1}) \right\} = +\infty. \quad (1)$$

Достатність умови (1) доведена в [3] (див. теорему 1). Щоб довести необхідність, зауважимо, що з огляду на формулу Стирлінга умова (1) є рівносильною умові

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{n_p + 1} \left\{ \ln(n_p + 1)! - \sum_{j=1}^p \ln(n_j - n_{j-1})! \right\} = +\infty. \quad (2)$$

Розглянемо функцію

$$f_0(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p z^{n_p+1},$$

де $a_0 = 1$ і

$$a_p = \frac{1}{3^p(n_p + 1)!} \prod_{j=1}^p (n_p - n_{j-1})!, \quad p \in \mathbb{N},$$

для якої

$$\begin{aligned} f_0^{(n_p)}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n_{p+k} + 1)!}{(n_{p+k} - n_p + 1)!} a_{p+k} z^{n_{p+k} - n_p + 1} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{p+k}(n_{p+k} - n_p + 1)!} \prod_{j=1}^{p+k} (n_j - n_{j-1})! z^{n_{p+k} - n_p + 1}. \end{aligned}$$

В [1] показано, що для того щоб функція $g(z) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j z^j$ була однолистою в $\mathbb{D}$, досить, щоб $\sum_{j=2}^{\infty} (j+1)|b_j| < |b_1|$. Тому для того щоб довести однолистість в $\mathbb{D}$ функцій $f^{(n_p)}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, досить показати, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k(n_{p+k} - n_p)!} \prod_{j=p+1}^{p+k} (n_j - n_{j-1})! < 1,$$

а ця нерівність тривіальна, бо $m_1! \dots m_k! \leq (m_1 + \dots + m_k)!$ для всіх натуральних $m_1, \dots, m_k$.

Отже функція f_0 має ту властивість, що всі $f^{(n_p)}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, є однолистими в $\mathbb{D}$, яка б не була зростаюча послідовність (n_p) цілих невід'ємних чисел. Оскільки

$$\frac{1}{n_p + 1} \ln \frac{1}{a_p} = \frac{1}{n_p + 1} \{p \ln 3 + \ln(n_p + 1)! - \sum_{j=1}^p \ln(n_j - n_{j-1})!\},$$

то f_0 є цілою функцією тільки в тому випадку, коли виконується умова (2), тобто умова (1). Звідси випливає, що якщо умова (1) не виконується, то існує функція f_0 , яка не є цілою, але всі $f_0^{(n_p)}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, є однолистими в $\mathbb{D}$. Необхідність умови (1) доведена.

3. Щоб спростувати гіпотезу Шаха, тепер досить побудувати зростаючу послідовність (n_p) натуральних чисел таку, що $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{n_p} = \infty$, але умова (1) не виконується. Для цього покладемо $m_0 = 0$, $m_1 = 1$ і $m_{k+1} = (2m_k)^2$, $k \geq 2$, а в ролі (n_p) виберемо послідовність

$$m_0, m_1, 2m_1, \dots, m_k, m_k + 1, m_{k+2}, \dots, 2m_k, m_{k+1}, \dots$$

Для такої послідовності маємо

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{n_p} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=m_k}^{2m_k} \frac{1}{j} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2m_k - m_k + 1}{2m_k} = \infty,$$

а при $p \in \mathbb{N}$ такому, що $n_p = m_{k+1}$, виконується

$$\begin{aligned} \ln n_p - \frac{1}{n_p} \sum_{j=1}^p (n_j - n_{j-1}) \ln(n_j - n_{j-1}) &\leq \ln n_p - \frac{1}{n_p} (n_p - n_{p-1}) \ln(n_p - n_{p-1}) = \\ &= \frac{n_{p-1}}{n_p} \ln n_p - \left(1 - \frac{n_{p-1}}{n_p}\right) \ln \left(1 - \frac{n_{p-1}}{n_p}\right) = \frac{\ln(2m_k)}{m_k} - \left(1 - \frac{1}{2m_k}\right) \ln \left(1 - \frac{1}{2m_k}\right) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

$k \rightarrow \infty$, тобто умова (1) не виконується.

Зауважимо, що з умови (1) не завжди випливає умова $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{n_p} = \infty$, на що вказує приклад послідовності $n_p = p^2$, $p \in \mathbb{Z}_+$.

4. Позначимо через $A(\infty, (n_p))$ клас цілих функцій f таких, що всі $f^{(n_p)}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, є однолистами в $\mathbb{D}$, і нехай $\rho_f = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} (\ln \ln M_f(r)) / \ln r$ – порядок функції f , $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, а

$$\alpha = \overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{n_p \ln n_p} \sum_{j=1}^p (n_j - n_{j-1}) \ln(n_j - n_{j-1}).$$

Припустимо, що $\ln n_p \sim \ln n_{p+1}$, $p \rightarrow \infty$. Тоді для того щоб для кожної $f \in A(\infty, (n_p))$ виконувалась нерівність $\rho_f \leq \rho \in [1, \infty)$, необхідно і досить, щоб $\alpha \leq 1 - 1/\rho$.

Дійсно, в [3] показано, що $\rho_f \leq 1/(1 - \alpha)$ для кожної функції $f \in A(\infty, (n_p))$. Звідси випливає, що $\rho_f \leq \rho$, якщо тільки $\alpha \leq 1 - 1/\rho$. Якщо ж $1 - 1/\rho < \alpha < 1$, то неважко перевірити, що для функції f_0 має місце нерівність

$$\begin{aligned} \rho_{f_0} &= \overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \frac{(n_p + 1) \ln(n_p + 1)}{-\ln a_p} = \\ &= \overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{n_p \ln n_p} \sum_{j=1}^p (n_j - n_{j-1}) \ln(n_j - n_{j-1})} = \frac{1}{1 - \alpha} > \rho, \end{aligned}$$

тобто існує функція $f_0 \in A(\infty, (n_p))$, для якої нерівність $\rho_f \leq \rho$ не виконується.

Функція f_0 є екстремальною також при вивченні зростання функцій $f \in A(\infty, (n_p))$ в термінах узагальнених порядків.

Л І Т Е Р А Т У Р А

1. Shah S.M. Analytic functions with univalent derivatives and entire functions of exponential type // Bull. Amer. Math. Soc. 1972. V.78, N.2. P.110–118.
2. Miller S.S. Problems in complex function theory // Complex Anal. Proc. S.U.N.Y. Brockport conf. New York-Basel. 1978. P.167–177.
3. Шеремета М.М. О целых функциях с однолистами в круге производными // Укр. мат. журн. 1991. Т.43, N.3. С.400–406.

Department of Mechanics and Mathematics, Lviv University, Universytetska 1, Lviv, 290602, Ukraine

Надійшла 11.11.1992