

ПРО ЦЕНТРАЛЬНИЙ ПОКАЗНИК АБСОЛЮТНО ЗБІЖНОГО У ПІВПЛОЩИНІ РЯДУ ДІРІХЛЕ

О.Б. СКАСКІВ

ABSTRACT. O. Skaskiv, *On the central exponent of absolutely convergent in the halfplane Dirichlet series*, Math. Stud. **2** (1993) 35–40.

An example is constructed of Dirichlet series convergent in a halfplane which disproves two known theorems on asymptotic behaviour of the central exponent.

Нехай аналітична в $\{z: \operatorname{Re} z < 0\}$ функція F зображена абсолютно збіжним у цій півплощині рядом Діріхле

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n}, \quad 0 \leq \lambda_n \uparrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty). \quad (1)$$

Позначимо $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + iy)|: y \in \mathbb{R}\}$, $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n|e^{\sigma\lambda_n}: n \geq 1\}$. Нехай, крім того, $\nu(\sigma) = \nu(\sigma, F) = \max\{n: |a_n|e^{\sigma\lambda_n} = \mu(\sigma, F)\}$ – центральний індекс, а $\lambda_{\nu(\sigma)}$ – центральний показник ряду (1). Відомо [1], що $\ln M(\sigma, F)$ – опукла при $\sigma \in (-\infty; +\infty)$ функція. Похідну справа функції $\ln M(\sigma, F)$ позначимо $L(\sigma) = L(\sigma, F) = M'(\sigma, F)/M(\sigma, F)$.

В [2,3] приведено ряд теорем ([2], теорема 5 та зауваження на с.513; [3], теореми 1.5.25 та 1.6.25 на с. 285–287), в яких даються достатні умови для виконання співвідношення

$$L(\sigma) = (1 + o(1))\lambda_{\nu(\sigma)} \quad (2)$$

при $\sigma \rightarrow -0$ або зовні множини скінченної логарифмічної міри, або вздовж досить ”масивної” множини. Подамо характерне твердження такого типу повністю.

Теорема А ([2, теорема 5], [3, теорема 1.5.25]). Нехай $\sup\{|a_n|: n \geq 1\} = +\infty$. Якщо $\ln n = o(\lambda_n)$ ($n \rightarrow +\infty$), $\lim_{\sigma \rightarrow -0} (\ln \lambda_{\nu(\sigma)} / \ln \frac{1}{|\sigma|}) = \rho > 1$, то співвідношення (2) виконується при $\sigma \rightarrow -0$ ($\sigma \in E$), де E – множина нескінченної логарифмічної міри, тобто $\int_{E \cap [-1,0)} d(\ln(-\frac{1}{\sigma})) = +\infty$.

Метою цієї статті є показати, що згадані твердження з праць [2,3] не є вірними. Зокрема, теорема А.

Теорема. Для кожного $\eta > -1$ існують послідовність $0 \leq \lambda_n \uparrow +\infty$ ($n \rightarrow +\infty$), $\ln n = o(\lambda_n)$ ($n \rightarrow \infty$), та функція F , зображена рядом (1) з абсцисою абсолютної збіжності рівною нулю, такі, що:

- (а) $\lim_{\sigma \rightarrow -0} (\ln \lambda_{\nu(\sigma)} / \ln \frac{1}{|\sigma|}) = 2 + \eta$, $\ln \mu(\sigma, F) \asymp \left(\frac{1}{|\sigma|}\right)^{1+\eta}$ ($\sigma \rightarrow -0$);
- (б) $(L(\sigma) / \lambda_{\nu(\sigma)}) \rightarrow +\infty$ ($\sigma \rightarrow -0$).

Для доведення досить розглянути функцію F виду (1) з $\lambda_n = (\ln n)^{1+\alpha}$, $\ln a_n = \lambda_n^{1-q}$, $q = \frac{1}{2+\eta}$, $\alpha = \frac{1}{2+\eta+\eta_1}$, $\eta_1 > 0$, $\eta > -1$. Зауважимо, що $1 - \alpha - 2^{-\alpha} < 0$ для всіх $\alpha \geq 0$. Покажемо спочатку, що $\ln \mu(\sigma, F) = O(|\sigma|^{-1-\eta})$ ($\sigma \rightarrow -0$). Оскільки $\ln \mu(\sigma, F) \leq \max\{\psi(n): n \geq 0\}$, де $\psi(u) = u^{1-q} - u|\sigma|$, то знаходячи точку максимуму $u(\sigma)$ функції $\psi(u)$ з рівняння $\psi'(u) = 0$, послідовно маємо $u(\sigma) = ((1-q)/|\sigma|)^{1/q}$ та $\psi(u(\sigma)) = q(u(\sigma))^{1-q} = q(1-q)^{1+\eta} |\sigma|^{-1-\eta}$. Зауважимо, що функція $\psi(u)$ вгнута на $(0, +\infty)$, тому, якщо $n(\sigma) = \max\{n: \lambda_n \leq u(\sigma)\}$, то центральний індекс $\nu(\sigma, F)$ рівний або $n(\sigma)$, або $n(\sigma) + 1$. У кожному випадку, завдяки співвідношенню $\lambda_{n+1} - \lambda_n = o(1)$ ($n \rightarrow +\infty$), маємо $\ln \mu(\sigma, F) = (1 + o(1))\psi(u(\sigma))$ і $\ln \lambda_{\nu(\sigma)} = \ln(u(\sigma) + o(1)) = (1 + o(1))(2 + \eta) \ln(1/|\sigma|)$ ($\sigma \rightarrow -0$). Звідси, остаточно одержуємо пункт (а).

Доведення пункту (б) складніше, але також в достатній мірі елементарне. Воно ґрунтується на теоремі 1.2.5 з [4]. Сформулюємо дещо спрощений її варіант у вигляді леми, якою нам зручно буде користуватись.

Нехай, для кожного досить великого $t > 0$, $x = c(t) \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow +\infty$) – єдина точка максимуму функції $h(x, t)$, як функції змінної $x \geq 0$. Вважаючи $h(x, t)$ двічі диференційовною по x , позначимо $\rho(t) = |h''_{x^2}(c(t), t)|^{-1/2}$.

Лема. Якщо $\rho(t) = o(c(t))$ ($t \rightarrow +\infty$) і для кожного $A > 0$ $h''_{x^2}(x, t) = (1 + o(1)) \times h''_{x^2}(c(t), t)$ ($t \rightarrow +\infty$, $|x - c(t)| \leq A\rho(t)$), то існує функція $\tau(t) \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow +\infty$) така, що

$$\int_{|x-c(t)| \leq \tau(t)\rho(t)} \exp\{h(x, t)\} dx = (1 + o(1)) \sqrt{2\pi} \rho(t) \exp\{h(c(t), t)\} \quad (t \rightarrow +\infty), \quad (3)$$

при цьому можна вважати, що $(\tau(t)\rho(t)) = o(c(t))$ ($t \rightarrow +\infty$).

Зауваження. З леми випливає, що

$$\int_{|x-c(t)| \leq \tau(t)\rho(t)} x^{1+\alpha} \exp\{h(x, t)\} dx = (1+o(1)) \sqrt{2\pi}\rho(t)(c(t))^{1+\alpha} \exp\{h(c(t), t)\} \quad (t \rightarrow +\infty), \quad (4)$$

Продовжимо доведення теореми. Зауважимо спочатку, що для $n \leq n(\sigma) - 1$

$$\int_n^{n+1} \exp\{\psi((\ln u)^{1+\alpha})\} du \begin{cases} \geq \exp\{\psi(\lambda_n)\} \\ \leq \exp\{\psi(\lambda_{n+1})\}, \end{cases} \quad (5)$$

а для $n \geq n(\sigma) + 1$

$$\int_n^{n+1} \exp\{\psi((\ln u)^{1+\alpha})\} du \begin{cases} \geq \exp\{\psi(\lambda_{n+1})\} \\ \leq \exp\{\psi(\lambda_n)\}, \end{cases} \quad (6)$$

де $\psi(t) = t^{1-q} - |\sigma|t$. Тому

$$\begin{aligned} M(\sigma, F) = F(\sigma) &\leq \int_1^\infty \exp\{\psi((\ln u)^{1+\alpha})\} du - \\ &- \int_{n(\sigma)}^{n(\sigma)+1} \exp\{\psi((\ln u)^{1+\alpha})\} du + \exp\{\psi(\lambda_{n(\sigma)})\} + \exp\{\psi(\lambda_{n(\sigma)+1})\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Оскільки $\lambda_n/\lambda_{n+1} \rightarrow 1$ ($n \rightarrow +\infty$), то із (5) і (6) аналогічно попередньому при $\sigma \rightarrow -0$ маємо

$$\begin{aligned} M'(\sigma, F) = F'(\sigma) &= \sum_{n=2}^\infty \lambda_n a_n e^{\sigma \lambda_n} \geq \sum_{n=2}^{n(\sigma)} \int_{n-1}^n (\ln u)^{1+\alpha} \exp\{\psi((\ln u)^{1+\alpha})\} du + \\ &+ \sum_{n=n(\sigma)+1}^\infty \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \int_n^{n+1} (\ln u)^{1+\alpha} \exp\{\psi((\ln u)^{1+\alpha})\} du \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \int_1^\infty (\ln u)^{1+\alpha} \exp\{\psi((\ln u)^{1+\alpha})\} du - \\ &- \frac{1}{2} \int_{n(\sigma)}^{n(\sigma)+1} (\ln u)^{1+\alpha} \exp\{\psi((\ln u)^{1+\alpha})\} du. \end{aligned} \quad (8)$$

Займемось тепер оцінками інтегралів $\int_1^\infty$ в (7) та (8). Застосовуючи в обох інтегралах підстановку $x = \ln u/t$, де $t = (1/|\sigma|)^{1/(1+\alpha)}$, одержуємо

$$\begin{aligned} I(\sigma, F) &= \int_1^\infty \exp\{\psi((\ln u)^{1+\alpha})\} du = \\ &= t \int_1^\infty u \exp\{\psi((\ln u)^{1+\alpha})\} d(\ln u/t) = t \int_0^\infty \exp\{h(x, t)\} dx, \end{aligned}$$

де $h(x, t) = xt + (xt)^{q_1} - x^{1+\alpha}$, $q_1 = (1+\alpha)(1-q) \in (0; 1)$. Аналогічно

$$I(\sigma, F') = \int_1^\infty (\ln u)^{1+\alpha} \exp\{\psi((\ln u)^{1+\alpha})\} du = t^{2+\alpha} \int_0^\infty x^{1+\alpha} \exp\{h(x, t)\} dx.$$

Розіб'ємо кожен з інтегралів на п'ять інтегралів $I_j(F)$, $I_j(F')$ ($j = \overline{1, 5}$), що поширюються, відповідно, на проміжки $E_1 = [0, c(t)/2]$, $E_2 = [c(t)/2; c(t) - \tau(t)\rho(t)]$, $E_3 = [c(t) - \tau(t)\rho(t), c(t) + \tau(t)\rho(t)]$, $E_4 = [c(t) + \tau(t)\rho(t), 2c(t)]$, $E_5 = [2c(t), +\infty)$, де $x = c(t) - \epsilon$ єдиний додатний корінь рівняння $h'_x(x, t) = t + q_1 t^{q_1} x^{q_1-1} - (1 + \alpha)x^\alpha = 0$. Легко перевірити, що $c(t) \sim (t/(1 + \alpha))^{1/\alpha}$ ($t \rightarrow +\infty$) і, оскільки, $h(+\infty, t) = -\infty$, $h(0, t) = 0$, то $c(t)$ – точка максимуму функції $h(x, t)$ по x на проміжку $[0, +\infty)$. Ясно, що $h(c(t), t) \sim \alpha(t/(1 + \alpha))^{1+1/\alpha}$ ($t \rightarrow +\infty$). Нескладно перевірити, що умови леми виконуються, тому з (3) та (4) при $t \rightarrow +\infty$ одержуємо

$$I_3(F) \sim \sqrt{2\pi}\rho(t) \exp\{h(c(t), t)\}, \quad I_3(F') \sim I_3(F)(c(t))^{1+\alpha}. \quad (9)$$

Розглянемо тепер I_1 . Зауважимо, що при $t \rightarrow +\infty$

$$h\left(\frac{c(t)}{2}, t\right) - h(c(t), t) = \frac{1}{2} \left(\frac{t}{1 + \alpha}\right)^{1+1/\alpha} (1 - \alpha - 2^{-\alpha} + o(1)). \quad (10)$$

Оскільки, за вибором α , маємо $1 - \alpha - 2^{-\alpha} < 0$, то $h(c(t)/2, t) - h(c(t), t) \leq -K_1 h(c(t), t)$ ($t \rightarrow +\infty$), де $K_1 > 0$. Враховуючи, що $h(x, t)$ – зростаюча функція змінної x на проміжку $[0, c(t)]$, маємо

$$\begin{aligned} I_1(F) &= \int_0^{c(t)/2} \exp\{h(x, t)\} dx \leq \frac{c(t)}{2} \exp\{h(c(t)/2, t)\} = \\ &= O\left(\frac{c(t)}{\rho(t)} I_3(F) \exp\{-K_1 h(c(t), t)\}\right) \quad (t \rightarrow +\infty) \end{aligned} \quad (11)$$

Аналогічно, застосовуючи (9) та (10), виводимо

$$I_1(F') = \int_0^{c(t)/2} \exp\{h(x, t)\} x^{1+\alpha} dx = O\left(\frac{c(t)}{\rho(t)} I_3(F') \exp\{-K_1 h(c(t), t)\}\right) \quad (t \rightarrow +\infty). \quad (12)$$

Подібно розглядаємо I_5 . Для цього спочатку оцінимо різницю

$$h(2c(t), t) - h(c(t), t) = t^{1+1/\alpha} \frac{2}{(1 + \alpha)^{1+1/\alpha}} \left(1 + \frac{\alpha}{2} - 2^\alpha + o(1)\right) \leq -b h(c(t), t) \quad (t \rightarrow +\infty),$$

де $b = [2 + \alpha - 2^{1+\alpha}]/(2\alpha) > 0$, для всіх $\alpha > 0$. Враховуючи монотонність $(h(x, t) + A \ln x)$ на $[2c(t), +\infty)$, знову маємо

$$\begin{aligned} I_5(F) &= \int_{2c(t)}^\infty \exp\{h(x, t)\} dx \leq 4(c(t))^2 \exp\{h(2c(t), t)\} \int_{2c(t)}^\infty x^{-2} dx = \\ &= O\left(\frac{c(t)}{\rho(t)} I_3(F) \exp\{-b h(c(t), t)\}\right) \quad (t \rightarrow +\infty), \end{aligned} \quad (13)$$

$$I_5(F') = \int_{2c(t)}^\infty x^{1+\alpha} \exp\{h(x, t)\} dx = O\left(\frac{c(t)}{\rho(t)} I_3(F') \exp\{-b h(c(t), t)\}\right) \quad (t \rightarrow +\infty) \quad (14)$$

Зауважимо тепер, що $\rho(t) \sim t^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} / \sqrt{\alpha(1+\alpha)^{1/\alpha}}$ ($t \rightarrow +\infty$), тому з (11)–(14) одержуємо

$$I_1 = o(I_3), \quad I_5 = o(I_3) \quad (t \rightarrow +\infty). \quad (15)$$

Інтеграли I_2 та I_4 оцінюємо одночасно

$$I_2(F') + I_4(F') \geq \left(\frac{c(t)}{2}\right)^{1+\alpha} I_2(F) + (c(t))^{1+\alpha} I_4(F). \quad (16)$$

Отже, позначаючи через $\mathcal{P}(t) = \max\{I_2(F), I_3(F), I_4(F)\}$, з (9), (15) та (16) одержуємо

$$I(\sigma, F) = t((1 + o(1))I_3(F) + I_2(F) + I_4(F)) \leq (3 + o(1))t\mathcal{P}(t) \quad (t \rightarrow +\infty), \quad (17)$$

$$\begin{aligned} I(\sigma, F') &= t^{2+\alpha}((1 + o(1))I_3(F') + I_2(F') + I_4(F')) \geq \\ &\geq t^{2+\alpha}((1 + o(1))I_3(F) + \frac{1}{2^{1+\alpha}}I_2(F) + I_4(F))(c(t))^{1+\alpha} \geq \\ &\geq K_2 t^{2+\alpha} \mathcal{P}(t)(c(t))^{1+\alpha} \quad (t \rightarrow +\infty), \end{aligned} \quad (18)$$

де $K_2 > 0$ – деяка стала. Для завершення доведення зауважимо, що при $t \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \exp\{\psi(\lambda_{n(\sigma)})\} &= \exp\{\psi(\lambda_{n(\sigma)}) + (\lambda_{n(\sigma)})^{\frac{1}{1+\alpha}} - (\lambda_{n(\sigma)})^{\frac{1}{1+\alpha}}\} \leq \\ &\leq \exp\{h(c(t), t) - \ln n(\sigma)\} = o(I_3(F)) \end{aligned}$$

Аналогічно,

$$\begin{aligned} \exp\{\psi(\lambda_{n(\sigma)+1})\} &= o(I_3(F)), \quad \int_{n(\sigma)}^{n(\sigma)+1} \exp\{\psi((\ln u)^{1+\alpha})\} du = o(I_3(F)), \\ &\int_{n(\sigma)}^{n(\sigma)+1} (\ln u)^{1+\alpha} \exp\{\psi((\ln u)^{1+\alpha})\} du \leq \\ &\leq (u(\sigma) + o(1)) \exp(\max\{\psi(\lambda_{n(\sigma)}); \psi(\lambda_{n(\sigma)+1})\}) \leq \\ &\leq (u(\sigma) + o(1)) \exp\{h(c(t), t) - (\lambda_{n(\sigma)})^{\frac{1}{1+\alpha}}\} = \\ &= (u(\sigma) + o(1)) \exp\{h(c(t), t) - (1 + o(1))(u(\sigma))^{\frac{1}{1+\alpha}}\} = o(I_3(F)), \end{aligned}$$

($t \rightarrow +\infty$, $t = (1/|\sigma|)^{1/(1+\alpha)}$). Отже, $M(\sigma, F) = I(\sigma, F) (1 + o(1))$ ($\sigma \rightarrow -0$). Тому з (7) та (8), враховуючи (17) та (18), маємо

$$\begin{aligned} M'(\sigma, F) &\geq \frac{1}{2} I(\sigma, F') + o(I_3(F)) \geq (K_2/2 + o(1))t^{2+\alpha} \mathcal{P}(t)(c(t))^{1+\alpha} \geq \\ &\geq (K_2/6 + o(1))(tc(t))^{1+\alpha} M(\sigma, F) \geq K_3 \left(\frac{1}{|\sigma|}\right)^{1+\frac{1}{\alpha}} M(\sigma, F) \quad (\sigma \rightarrow -0), \end{aligned}$$

де $K_3 > 0$ – деяка стала. Залишилось пригадати, що $\lambda_{\nu(\sigma)} = O((1/|\sigma|)^{2+\eta})$ ($\sigma \rightarrow -0$) та $\frac{1}{\alpha} = 2 + \eta + \eta_1$. Отже, остаточно одержуємо

$$M'(\sigma, F)/(M(\sigma, F)\lambda_{\nu(\sigma)}) \geq (1/|\sigma|)^{1+\eta_1/2} \quad (\sigma \rightarrow -0).$$

Теорему доведено.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Doetsch G. Über die obere Grenze des absoluten Betrages einer analytischen Funktion auf Geraden // Math. Z. 1920. Bd.8. S.237–240.
2. Дагене Е. О центральном показателе ряда Дирихле // Литовский матем. сборн. 1968. Т.8, N.3. С.503–520.
3. Стрелиц Ш.И. Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений.– Вильнюс: Минтис, 1972. 468 с.
4. Евграфов М.А. Асимптотические оценки и целые функции.– М.: Наука. 1979. 320 с.

Department of Mechanics and Mathematics, Lviv University, Universytetska 1, Lviv, 290000, Ukraine

Надійшло 10.02.1993