

СЧЕТНО КОМПАКТНАЯ СЕКВЕНЦИАЛЬНАЯ ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ПОЛУГРУППА С ДВУСТОРОННИМИ СОКРАЩЕНИЯМИ ЯВЛЯЕТСЯ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ГРУППОЙ

А.А. ЮРЬЕВА

ABSTRACT. A. Yur'eva, *Countably compact sequential topological semigroup with two-sides cancellations is a topological group*, Math. Stud. **2** (1993) 23–24.

The main result is the assertion proclaimed in the title.

В 1952 г. К. Нумакура [4] доказал, что всякая компактная топологическая полугруппа с двусторонними сокращениями является топологической группой. Спустя три года А. Уоллес [5] сформулировал проблему: "Каждая ли счетно компактная полугруппа с двусторонними сокращениями будет топологической группой?"

В работе [2] получен положительный ответ на этот вопрос в дополнительном предположении, что пространство полугруппы удовлетворяет первой аксиоме счетности. В обзоре У. Комфорта [1] приводится неопубликованный результат Д.Гранта: счетно компактная полугруппа с двусторонними сокращениями, удовлетворяющая слабой первой аксиоме счетности, является топологической группой. Хорошо известно (см. [3], лемма 1), что секвенциальные пространства составляют класс, более широкий, чем пространства со слабой первой аксиомой счетности и, тем более, с первой аксиомой счетности.

В настоящей работе доказывается теорема, сформулированная в названии статьи. Она обобщает результаты, упомянутые в предыдущем абзаце.

Все пространства, рассматриваемые ниже, предполагаются хаусдорфовыми.

Напомним, что счетно компактным называют такое топологическое пространство, каждое счетное открытое покрытие которого содержит конечное подпокрытие. Если в пространстве множество замкнуто тогда и только тогда, когда вместе со всякой последовательностью оно содержит все ее пределы, то такое пространство называется секвенциальным. И, наконец, пространство, в котором каждая последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность, называют секвенциально компактным. Для нас важен тот факт, что в классе секвенциальных T_1 -пространств понятия секвенциальной компактности и счетной компактности совпадают (см.[7], 3.10.31).

Полугруппа с топологией, относительно которой полугрупповая операция непрерывна, называется топологической полугруппой. Говорят, что полугруппа S удовлетворяет двустороннему закону сокращения, если каждое из соотношений $xy = xz$ и $yx = zx$ влечет равенство элементов y и z для любых x, y, z из S .

Теорема. *Счетно компактная секвенциальная топологическая полугруппа с двусторонними сокращениями является топологической группой.*

Доказательство. Мы следуем рассуждениям К. Нумакуры [4]. Поскольку счетно компактное секвенциальное пространство полугруппы S секвенциально компактно, то согласно теореме 4 из [2], $Sa = aS = S$ для любого $a \in S$. Но тогда, как хорошо известно (см. например, [6]), S является группой, и нам осталось доказать непрерывность операции перехода к обратному элементу.

Пусть U – открытое множество в S . Нам нужно показать, что подмножество $V = U^{-1}$ открыто. Покажем замкнутость подмножества $S \setminus V$.

Рассмотрим последовательность $\{y_n\}$ элементов множества $S \setminus V$, сходящуюся к элементу y из S . Для каждого натурального n положим $x_n = y_n^{-1} \in S \setminus U$. Мы получили последовательность $\{x_n\}$ элементов полугруппы S . Секвенциальное счетно компактное пространство S , как уже говорилось выше, секвенциально компактно, а значит, можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$. Пусть последовательность $\{x_{n_k}\}$ сходится к точке x из S . Последовательность $\{x_{n_k}\}$ лежит в замкнутом множестве $S \setminus U$ полугруппы S , поэтому $x \in S \setminus U$. Но тогда $xy = (\lim x_{n_k})(\lim y_{n_k}) = \lim (x_{n_k}y_{n_k}) = e$, откуда $y = x^{-1} \in (S \setminus U)^{-1} = S \setminus V$. Из секвенциальности пространства S следует, что множество $S \setminus V$ замкнуто в S . Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Comfort W.W. Problems on topological groups and other homogeneous spaces. Open problems in topology. J. van Mill and G.M.Reed (editors). North-Holland: Elsevier Science Publishers B.V., 1990. P.314–347.
2. Mukherjea A., Tserpes N.A. A note on countably compact semigroups // J. Austral. Math. Soc. 1972. V.13. P.180–184.
3. Nyikos P.J. Metrizable and Fréchet-Urysohn property in topological groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1981. V.83, N.4. P.793–801.
4. Numakura K. On bicomact semigroups // Math. J. Okayama Univ. 1952. V.1. P.99–108.
5. Wallace A.D. The structure of topological semigroups // Bull. Amer. Math. Soc. 1955. V.61. P.95–112.
6. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ, Т.1.–М.:Наука, 1975.
7. Энгелькинг Р. Общая топология.–М.:Мир, 1986.

Department of Mechanics and Mathematics, Lviv University, Universytetska 1, Lviv, 290000, Ukraine

Поступило 25.12.1992