

ПРО ПРОСТІ ОДИНИЧНО РЕГУЛЯРНІ КІЛЬЦЯ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ДІЛЬНИКІВ

Б.В. ЗАБАВСЬКИЙ

ABSTRACT. B. Zabavskyi, *On prime unity regular rings of elementary divisors*, Math. Stud. **2** (1993) 21–22.

Necessary and sufficient conditions are given for simple unity regular ring to be elementary divisor ring.

Відомо, що над одинично регулярним кільцем довільна матриця еквівалентна діагональній матриці [1]. В даній роботі досліджуються умови на просте одинично регулярне кільце, при яких довільна матриця з елементами з даного кільця еквівалентна діагональній матриці з умовою повної подільності відповідних діагональних елементів, тобто досліджуються умови, при яких просте одинично регулярне кільце є кільцем елементарних дільників.

Під кільцем розуміємо асоціативне кільце з одиницею, відмінною від нуля. Якщо в кільці R для довільного елемента a рівняння $axa = a$ має розв'язок, тоді це кільце називається регулярним. Якщо цей розв'язок є зворотнім елементом кільця R , тоді R називається одинично регулярним. Говорять, що кільце R має стабільний ранг 1, якщо з умови $aR + bR = R$ випливає існування елемента $y \in R$ такого, що $a + by$ – зворотній елемент кільця R . Відомо, що регулярне кільце є одинично регулярним тоді і тільки тоді, коли воно має стабільний ранг 1 [2].

Нагадаємо, що матриці A і B з елементами кільця R називають еквівалентними, якщо $A = PBQ$ для зворотніх над R матриць P і Q відповідних розмірів. Якщо матриця A з елементами кільця R еквівалентна деякій діагональній матриці $\text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r, 0, \dots, 0)$, де $\varepsilon_i R \cap R \varepsilon_i \supseteq R \varepsilon_{i+1} R$ ($i = 1, 2, \dots, r - 1$), то говорять, що матриця A володіє діагональною редукцією (під діагональною матрицею розуміємо не обов'язково квадратну матрицю, а лише таку, в якій на головній діагоналі стоять відповідні елементи, а на інших місцях – нулі). Якщо над кільцем усі матриці володіють діагональною редукцією, то тоді кільце R називається кільцем елементарних дільників [3].

Через $\mathcal{U}(R)$ позначимо групу зворотніх елементів кільця R , а R_2 – кільце квадратних матриць розміру 2 з елементами з кільця R .

Твердження 1. Якщо R – просте одинично регулярне кільце елементарних дільників, то тоді для довільного ненульового елемента $a \in R$ існують елементи $u_i, v_i \in R$ ($i = 1, 2$), такі що $u_1av_1 + u_2av_2 = 1$, або $u_1(1-a)v_1 + u_2(1-a)v_2 = 1$.

Доведення. В силу означення R маємо $\text{diag}(a, a)P = Q \text{diag}(z, b)$, $RbR \subseteq zR \cap Rz$, $P = (p_{ij}) \in \mathcal{U}(R_2)$, $Q = (q_{ij}) \in \mathcal{U}(R_2)$.

Оскільки R – просте, то можливі випадки

- 1) $z \in \mathcal{U}(R)$;
- 2) $b = 0$.

У випадку $z \in \mathcal{U}(R)$ твердження очевидне. Якщо ж $b = 0$, тоді $ap_{12} = 0$, $ap_{22} = 0$. Звідси $p_{12} = (1-a)x$, $p_{22} = (1-a)y$, де $x, y \in R$. Оскільки $Rp_{12} + Rp_{22} = R$, то $up_{12} + vp_{22} = 1$, де $u, v \in R$. Звідси $u(1-a)x + v(1-a)y = 1$, що і треба було довести.

Твердження 2. Нехай R – кільце стабільного рангу 1 і для довільного ненульового елемента $a \in R$ виконується $u_1av_1 + u_2av_2 = 1$. Тоді для довільних елементів $a, b \in R$ таких, що $ab \neq 0$, або $ba \neq 0$ знайдуться елементи $x, y \in R$ такі, що $ax + yb \in \mathcal{U}(R)$.

Доведення. Якщо $ab \neq 0$, тоді $u_1abv_1 + u_1abv_2 = 1$. Оскільки R – стабільність рангу 1, то з $u_1aR + u_2abR = R$, випливає, що $u_1ax + u_2ab \in \mathcal{U}(R)$, $x \in R$. Звідси $Rax + Rb = R$, і, аналогічно, $ax + yb \in \mathcal{U}(R)$. Твердження доведено.

Теорема. Просте одинично регулярне кільце R є кільцем елементарних дільників, якщо для довільного ідемпотента $e \in R$ знайдуться такі елементи u_i, v_i ($i = 1, 2$), що $u_1ev_1 + u_2ev_2 = 1$.

Доведення. В силу результатів [1,3] для доведення теореми достатньо обмежитись матрицями вигляду $\text{diag}(e, f)$, де $e = e^2$, $f = f^2$.

Якщо $ef = fe = 0$, то тоді легко переконатись, що матриця $\text{diag}(e, f)$ еквівалентна матриці $\text{diag}(e + f, 0)$. Якщо $ef \neq 0$, тоді в силу твердження 2 існують елементи $x, y \in R$ такі, що $xa + by = u \in \mathcal{U}(R)$. Звідси

$$\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & f \\ e & 0 \end{pmatrix} = B.$$

Очевидно, що матриця B володіє діагональною редукцією. Оскільки матриці $\text{diag}(e, f)$ і B еквівалентні, то теорема доведена.

Л І Т Е Р А Т У Р А

1. Henriksen M. On a class of regular rings, that are elementary divisor rings // Arch. der Math. 1973. V.24. P.133–141.
2. Fuchs Z. On a substitution property for modules // Monatshefte für Math. 1971. V.75. P.198–204.
3. I.Kaplansky. Elementary divisor and modules.// Trans. Amer.Math. Soc. 1949. V.66. P.464–491.

Department of Mechanics and Mathematics, Lviv University, Universytetska 1, Lviv, 290000, Ukraine

Одержано 22.12.1992