

ПСЕВДОСКІНЧЕННІ ПОЛЯ І ЗАКОН ВЗАЄМНОСТІ

В. І. АНДРІЙЧУК

ABSTRACT. V. Andriichuk, *Pseudofinite fields and reciprocity law*, Math. Stud. **2** (1993) 14–20.

Let S be nonempty subsets of prime numbers. An extension L of a field K is said to be S -extension if all the prime divisors of degree $[L : K]$ are contained in S .

Let $\mathfrak{K}$ be a S -pseudofinite field, K be a field of algebraic functions of one variable with the field of constants $\mathfrak{K}$, $\mathcal{I}_K$ be the group of ideles of the field K and C_K be the idel class group, G_K^{ab} be the Galois group of maximal abelian S -extension of K .

It is shown in the paper that the global norm-residue map $\Theta_K : \mathcal{I}_K \rightarrow G_K^{ab}$ induces an isomorphism $\Theta_{L/K} : C_K/N_{L/K}C_L \rightarrow \text{Gal}(L/K)$ for every finite abelian S -extension of the field K .

Відомо, що класична локальна теорія полів класів узагальнюється на загальні локальні поля, тобто на повні дискретно нормовані поля з квазіскінченними полями лишків. Тому природно постало питання, чи можна узагальнити глобальну теорію полів класів на поля алгебраїчних функцій від однієї змінної з квазіскінченними полями констант. Виявилось, що у загальному випадку відповідь на це питання негативна. Це показано у роботах Д.С.Ріма і Г.Уеплса [1] і О.М.Введенського [2]. Однак у роботах Д.С.Ріма і Г.Уеплса [1] і Тае Кун Зео і Г.Уеплса [3] показано, що глобальна теорія полів класів може бути узагальнена на поля алгебраїчних функцій однієї змінної, квазіскінченні поля констант $\mathfrak{K}$ яких задовольняють наступні умови:

(*) поле $\mathfrak{K}$ має ненульову характеристику p , алгебраїчне над своїм простим підполем $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, має скінченний q -примарний степінь над $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ для всіх простих q .

Зауважимо, що квазіскінченне поле $\mathfrak{K}$, що задовольняє умови (*), є псевдоскінченним за Аксом [4] полем і що клас всіх псевдоскінченних полів є ширшим від класу полів (*).

Нагадаємо, що псевдоскінченними полями називають такі поля, які мають наступні властивості:

- 1) $\mathfrak{K}$ – досконале поле;
- 2) $\text{Gal}(\bar{\mathfrak{K}}/\mathfrak{K}) \simeq \hat{\mathbb{Z}} \simeq \prod_q \mathbb{Z}_q$, де $\bar{\mathfrak{K}}$ – алгебраїчне замикання поля $\mathfrak{K}$ і $\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_q$ – група цілих q -адичних чисел.
- 3) кожен абсолютно незвідний многовид над полем $\mathfrak{K}$ має $\mathfrak{K}$ -раціональну точку.

Поля, які задовольняють останню умову, називаються псевдо алгебраїчно замкнутими полями.

Нехай S – непорожня підмножина множини P всіх простих чисел. Досконало псевдо алгебраїчно замкнуте поле $\mathcal{K}$ називається S -псевдоскінченним, якщо $Gal(\mathcal{K}/\mathcal{K}) \simeq \prod_{q \in S} \mathbb{Z}_q$.

У цій роботі вивчаються загальні локальні поля з S -псевдоскінченними полями лишків та поля алгебраїчних функцій від однієї змінної з S -псевдоскінченними полями констант.

Далі $\mathcal{K}$ означає псевдоскінченне поле.

Нехай $\mathbb{N}^{[S]} = \{n \in \mathbb{N} \mid n = p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}; p_1, \dots, p_m \in S\}$. Якщо ℓ/k – розширення поля k степеня n і $n \in \mathbb{N}^{[S]}$, то поле ℓ називаємо S -розширенням поля k . Якщо $S = P$, то довільне скінченне розширення поля k є S -розширенням. Максимальним S -розширенням називають композит усіх скінченних S -розширень, що містяться у даному алгебраїчному замиканні поля k .

Мета цієї роботи — узагальнення локальної теорії полів класів на випадок S -розширень загальних локальних полів з псевдоскінченними полями лишків та глобальної теорії полів класів на випадок S -розширень полів алгебраїчних функцій від однієї змінної з S -псевдоскінченними полями констант. У випадку поля функцій одержуємо узагальнення результату роботи [1]. У випадку загального локального поля одержуємо відомі результати, якщо $S = P$ і якщо $S = \{p\}$, де $p = \text{char } \mathcal{K}$, [5,6].

Одержані у роботі результати анонсовані у [7].

1. ЗАГАЛЬНІ ЛОКАЛЬНІ ПОЛЯ.

Нехай k – повне дискретно нормоване поле з S -псевдоскінченним полем лишків $\mathcal{K}$, $k^{[S]}$ – максимальне сепарабельне S -розширення у заданому сепарабельному замиканні поля k , $G = Gal(k^{[S]}/k)$ – його група Галуа, $F = \{\ell \mid k \subset \ell \subset k^{[S]}, [\ell : k] < \infty\}$, $G_\ell = Gal(k^{[S]}/\ell)$ для $\ell \in F$. Для групи A нехай $A^{(S)} = \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}^{[S]}, a^n = id\}$. Через B_ℓ позначимо групу Брауера поля ℓ . Має місце

Теорема 1. Для $\ell \in F$ існують ізоморфізми $inv_\ell^{(S)} : B_\ell^{(S)} \rightarrow (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(S)}$ такі, що $\{G, \{G_\ell \mid \ell \in F\}, k^{[S]*}, inv_\ell^{(S)}\}$ є формацією класів.

Доведення. Нехай ℓ/k – скінченне або нескінченне розширення Галуа. $G = Gal(\ell/k)$ – його топологічна група Галуа. A – дискретний G -модуль, $H^i(G, A)$ – когомології Галуа. Відомо, що $H^1(G, \ell^*) = 0$ за теоремою Гільберта-90, $B_k = H^2(Gal(k_s/k), k_s^*) = \bigcup_{[\ell_1:k] < \infty} (Gal(\ell_1/k), \ell_1^*)$. Оскільки поле лишків поля k є досконалим, то маємо точну послідовність [5]

$$0 \rightarrow B_{\mathcal{K}} \rightarrow B_k \rightarrow Hom(Gal(\bar{\mathcal{K}}/\mathcal{K}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow 0 \quad (1)$$

($Hom(Gal(\bar{\mathcal{K}}/\mathcal{K}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ – група неперервних гомоморфізмів). З того, що поле $\mathcal{K}$ є псевдо алгебраїчно замкнутим, випливає, що $B_{\mathcal{K}} = 0$. З точної послідовності (1) одержуємо

$$B_k \simeq Hom(Gal(\bar{\mathcal{K}}/\mathcal{K}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}). \quad (2)$$

Якщо ℓ/k – скінченне розширення з індексом галуження e і λ – поле лишків поля ℓ , то справедлива комутативна діаграма (див. [5,6])

$$\begin{array}{ccc} B_k & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}(\text{Gal}(\bar{\kappa}/\kappa), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ \downarrow \text{res} & & \downarrow e \cdot \text{res} \\ B_\ell & \xrightarrow{\sim'} & \text{Hom}(\text{Gal}(\bar{\kappa}/\lambda), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}). \end{array} \quad (3)$$

Якщо $\bar{\sigma}$ – твірна групи $\text{Gal}(\bar{\kappa}/\kappa)$, то означимо гомоморфізм

$$\beta : \text{Hom}(\text{Gal}(\bar{\kappa}/\kappa), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(S)},$$

поклавши $\beta(\chi) = \chi(\bar{\sigma})$ для $\chi \in \text{Hom}(\text{Gal}(\bar{\kappa}/\kappa), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Для скінченного розширення λ/κ степеня $n \in \mathbb{N}^{[S]}$ аналогічно означаємо $\beta' : \text{Hom}(\text{Gal}(\bar{\kappa}/\lambda), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(S)}$, $\beta'(\chi') = \chi'(\bar{\sigma}^n)$ для $\chi' \in \text{Hom}(\text{Gal}(\bar{\kappa}/\lambda), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$

$$\text{Hom}(\text{Gal}(\bar{\kappa}/\kappa), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}\left(\prod_{q \in S} \mathbb{Z}_q, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(S)}.$$

Наступна діаграма

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(\text{Gal}(\bar{\kappa}/\kappa), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\sim} & (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(S)} \\ \downarrow \text{res} & & \downarrow n \\ \text{Hom}(\text{Gal}(\bar{\kappa}/\lambda), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\sim'} & (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(S)} \end{array} \quad (4)$$

комутативна.

Справді, $\beta' \text{res } \chi = \text{res } \chi(\bar{\sigma}^n) = \chi(\bar{\sigma}^n) = n \chi(\bar{\sigma}) = n \beta(\chi)$.

Нехай тепер ℓ/k – скінченне сепарабельне S -розширення поля k , $n = [\ell : k] \in \mathbb{N}^{[S]}$. Покладемо $\text{inv}_k = \beta \circ \alpha$, $\text{inv}_\ell = \beta' \circ \alpha'$. Тоді з (3) і (4) випливає, що діаграма

$$\begin{array}{ccc} B_k & \xrightarrow[\text{inv}_k]{\sim} & (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(S)} \\ \downarrow \text{res} & & \downarrow n \\ B_\ell & \xrightarrow[\text{inv}_\ell]{\sim} & (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(S)} \end{array} \quad (5)$$

комутативна.

З комутативної діаграми з точними рядками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^2(\text{Gal}(\ell/k), \ell^*) & \longrightarrow & B_k & \longrightarrow & B_\ell \\ & & \downarrow \text{inv}_{\ell/k} & & \downarrow \text{inv}_k & & \downarrow \text{inv}_\ell \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \longrightarrow & (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(S)} & \xrightarrow{n} & (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(S)} \end{array}$$

одержуємо, що

$$H^2(\text{Gal}(\ell/k), \ell^*) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}. \quad (6)$$

Враховуючи всю одержану інформацію, бачимо, що теорема 1 доведена.

2. ПОЛЯ ФУНКЦІЙ.

Нехай $\varkappa$ – S -псевдоскінченне поле, $j = \text{Gal}(\bar{\varkappa}/\varkappa)$, $j \simeq \prod_{q \in S} \mathbb{Z}_q$, $\bar{\sigma}$ – фіксована твірня групи j .

Якщо k загальне локальне поле з полем лишків $\varkappa$, то як було показано в п.1, існує ізоморфізм $\text{inv}_k : B_k \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(S)}$, де B_k – група Брауера поля k .

Нехай ℓ/k – скінченне S -розширення Галуа, $G = \text{Gal}(\ell/k)$. Враховуючи (6), бачимо, що група $H^2(G, \ell^*)$ циклічна, має порядок $n = [\ell : k]$ і має канонічну твірну $u_{\ell/k}$ таку, що $\text{inv}_k(u_{\ell/k}) = \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. $\cup$ -добуток на $u_{\ell/k}$

$$H^{-2}(G, \mathbb{Z}) \xrightarrow{u_{\ell/k}} H^0(G, \ell^*)$$

визначає ізоморфізм групи G^{ab} – групи Галуа максимального абелевого підрозширення розширення ℓ/k на групу $k^*/N_{\ell/k}\ell^*$, де $N_{\ell/k}$ – норменний гомоморфізм. Обернений до цього ізоморфізму називається локальним відображенням взаємності або локальним відображенням норменного лишку

$$\Theta_{\ell/k} : k^*/N_{\ell/k}\ell^* \rightarrow G^{ab}.$$

Відображення $\Theta_{\ell/k}$ можна описати за допомогою характерів [8]: нехай

$\chi \in \text{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta} H^2(G, \mathbb{Z})$ деякий характер групи G , $\delta\chi$ – його образ у групі $H^2(G, \mathbb{Z})$ відносно кограничного гомоморфізму δ , $\bar{a}$ – образ елемента $a \in k^*$ у $k^*/N_{\ell/k}\ell^*$ відносно канонічного гомоморфізму, $\bar{a} \cup \delta\chi$ – $\cup$ -добуток $\bar{a}$ і $\delta\chi$, $\bar{a} \cup \delta\chi \in H^2(G, \ell^*) \subset B_k$. Для $\chi \in \text{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ справедлива рівність

$$\chi(\Theta_{\ell/k}(a)) = \text{inv}_k(\bar{a} \cup \delta\chi). \quad (7)$$

Відображення $\Theta_{\ell/k}$ добре узгоджені між собою для різних ℓ ([8], ст. 218), що дозволяє, переходячи до границі, визначити гомоморфізм Θ_k (локальний символ норменного лишку)

$$\Theta_k : k^* \rightarrow G_k^{ab},$$

де G_K^{ab} – група Галуа максимального абелевого S -розширення поля k . З рівності (7) випливає, що для довільного характеру $\chi \in \text{Hom}(G_k^{ab}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ справедлива рівність

$$\chi(\Theta_k(a)) = \text{inv}_k(\bar{a} \cup \delta\chi).$$

Зауважимо, що гомоморфізм Θ_k залежить лише від вибору твірної групи $j = \text{Gal}(\bar{\varkappa}/\varkappa)$.

Нехай тепер K – поле алгебраїчних функцій від однієї змінної з S -квазіскінченним полем констант $\varkappa$. Нехай v – нормування поля K . Поповнення k_v поля K за нормуванням v є загальним локальним полем і його поле лишків $\varkappa_v$ є скінченним алгебраїчним розширенням поля $\varkappa$. Тому $\varkappa_v$ – також S -квазіскінченне поле і ми можемо вважати $\bar{\sigma}^{d_v}$ ($d_v = [\varkappa_v : \varkappa]$) твірною групи $j_v = \text{Gal}(\bar{\varkappa}/\varkappa_v)$ ($\bar{\varkappa}$ – алгебраїчне замикання поля $\varkappa_v$) і означити локальні символи норменного лишку $\Theta_v : k_v^* \rightarrow G_{k_v}^{ab}$ для всіх нормувань v поля K .

Нехай $\mathcal{I}_K$ – група іделів поля K . G_K^{ab} – група Галуа максимального абелевого S -розширення поля K . Означимо глобальний символ норменного лишку

$$\tilde{\Theta}_K : \mathcal{I}_K \rightarrow G_K^{ab},$$

поклавши $\tilde{\Theta}_K = \prod_v \Theta_v$ (v пробігає всі нормування поля K), або, в термінах характерів: для довільного $\chi \in \text{Hom}(G_K^{ab}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$

$$\chi(\tilde{\Theta}_K(a)) = \text{inv}_K(a \cup \delta\chi) = \sum_v \text{inv}_{k_v}(a \cup \delta\chi).$$

З теореми Тзена та формули добутку випливає, що гомоморфізм $\tilde{\Theta}_K$ тривіальний на головних ідеях і, отже, визначає гомоморфізм $\Theta_K : C_K \rightarrow G_K^{ab}$, де C_K – група класів іделів поля K . Гомоморфізм Θ_K також називають гомоморфізмом норменного лишку.

ОЗНАЧЕННЯ. Скажемо, що закон взаємності виконується для S -розширень над полем $\mathfrak{K}$, якщо для кожного поля K алгебраїчних функцій над полем констант $\mathfrak{K}$ гомоморфізм норменного лишку індукує ізоморфізм

$$\Theta_{L/K} : C_K / N_{L/K} C_L \rightarrow \text{Gal}(L/K)$$

для всіх скінченних абелевих S -розширень поля K .

Теорема 2. *Закон взаємності виконується для S -розширень над S -псевдоскінченним полем $\mathfrak{K}$.*

Доведення. Нехай $\tilde{K} = \bar{\mathfrak{K}}K$, де $\bar{\mathfrak{K}}$ – алгебраїчне замикання поля $\mathfrak{K}$, $\text{Div } \tilde{K}$ (відповідно $P(\tilde{K})$) – група дивізорів (відповідно головних дивізорів) поля $\tilde{K}$, $\text{Pic } \tilde{K} = \text{Div } \tilde{K} / P(\tilde{K})$, $j = \text{Gal}(\bar{\mathfrak{K}}/\mathfrak{K})$, $\text{Br } K = H^2(j, \tilde{K}^*)$, B_{k_v} – група Брауера загального локального поля k_v .

У роботі [1] доведена достатня умова виконання закону взаємності для довільних розширень (тобто у випадку $S = P$ – множина всіх простих чисел) над квазіскінченним полем $\mathfrak{K}$. А саме, закон взаємності виконується над $\mathfrak{K}$, якщо $H^1(j, \text{Pic } \tilde{K}) = 0$. Крім того, якщо $H^1(j, \text{Pic } \tilde{K}) = 0$, то має місце точна послідовність

$$0 \rightarrow \text{Br } K \rightarrow \sum_v B_{k_v} \xrightarrow{\text{inv}_K} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(S)} \rightarrow 0 \quad (8)$$

де inv_K – сума локальних інваріантів inv_{k_v} . Легко перевірити, що ці факти залишаються в силі і у випадку, коли поле $\mathfrak{K} \in S$ -псевдоскінченним. Члени точної послідовності (8) є у цьому випадку S -періодичними групами.

Отже, для доведення теореми 2 досить показати, що якщо $\mathfrak{K}$ – S -псевдоскінченне поле, то $H^1(j, \text{Pic } \tilde{K}) = 0$.

Нехай X – гладка, абсолютно незвідна крива, що є моделлю поля K . $\bar{X} = X \times_{\mathfrak{K}} \bar{\mathfrak{K}}$ – модель поля $\tilde{K} = \bar{\mathfrak{K}}K$. Тоді $\text{Div } \tilde{K} \simeq \text{Div } \bar{X}$, $\text{Pic } \tilde{K} \simeq \text{Pic } \bar{X}$. Нехай $\text{Pic}_0 \bar{X}$ – підгрупа групи $\text{Pic } \bar{X}$, що складається з елементів нульового степеня групи $\text{Pic } \bar{X}$. Розглянемо точну послідовність когомологій Галуа

$$H^1(j, \text{Pic}_0 \bar{X}) \rightarrow H^1(j, \text{Pic } \bar{X}) \rightarrow H^1(j, \mathbb{Z}) = 0, \quad (9)$$

відповідну точній послідовності j -модулів

$$0 \rightarrow \text{Pic}_0 \bar{X} \rightarrow \text{Pic } \bar{X} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Нехай $\mathcal{J}$ – $\mathfrak{K}$ -многовид Альбанезе для X , $\mathcal{J}(\bar{\mathfrak{K}})$ – група $\bar{\mathfrak{K}}$ -раціональних точок многовиду $\mathcal{J}$. У роботі С. Ліхтенбаума [9] показано, що групи $\mathcal{J}(\bar{\mathfrak{K}})$ і $\text{Pic } \bar{X}$ ізоморфні як j -модулі, отже $H^1(j, \mathcal{J}(\bar{\mathfrak{K}})) = H^1(j, \text{Pic}_0 \bar{X})$.

Далі, $H^1(\mathfrak{j}, \mathcal{J}(\bar{\kappa})) = 0$, оскільки поле κ є псевдо алгебраїчно замкнутим. Тому з точної послідовності (9) одержуємо

$$H^1(\mathfrak{j}, \text{Pic } \bar{X}) = H^1(\mathfrak{j}, \text{Pic}_0 \bar{X}) = 0.$$

Нехай тепер L/K – скінченне S -розширення Галуа поля K , $G = \text{Gal}(L/K)$. Запишемо точну послідовність (8) для поля L :

$$0 \rightarrow \text{Br } L \rightarrow \sum_v B_{\ell_v} \xrightarrow{\text{inv}_L} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(S)} \rightarrow 0. \quad (10)$$

Розглянемо точну комутативну діаграму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Br } K & \longrightarrow & \sum_v B_{k_v} & \xrightarrow{\text{inv}_K} & (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(S)} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & (\text{Br } L)^G & \longrightarrow & (\sum_v B_{\ell_v})^G & \xrightarrow{\text{inv}_L} & (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(S)} \longrightarrow H^1(G, \text{Br } L), \end{array} \quad (11)$$

у якій нижній рядок — відрізок точної послідовності когомологій, що відповідає точній послідовності (10). З діаграми (11) і леми про зміну маємо точну послідовність

$$0 \rightarrow H^2(G, L^*) \rightarrow H^2(G, \mathcal{I}_L) \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow (\text{Br } L)^G / \text{Im } \text{Br } K, \quad (12)$$

де $n = [L : K]$.

Крім того, точній послідовності G -модулів

$$0 \rightarrow L^* \rightarrow \mathcal{I}_L \rightarrow C_L \rightarrow 0$$

відповідає точна послідовність когомологій Галуа

$$0 \rightarrow H^1(G, C_L) \rightarrow H^2(G, L^*) \rightarrow H^2(G, \mathcal{I}_L) \rightarrow H^2(G, C_L) \rightarrow H^3(G, L^*). \quad (13)$$

Нехай L/K – циклічне розширення. Тоді точна спектральна послідовність Хохшільда-Серра

$$0 \rightarrow H^2(G, L^*) \rightarrow \text{Br } K \rightarrow (\text{Br } L)^G \rightarrow H^3(G, L^*)$$

показує, що $\text{Br } K \rightarrow (\text{Br } L)^G$ – епіморфізм, і тому точна послідовність (12) дає точну послідовність

$$0 \longrightarrow H^2(G, L^*) \longrightarrow H^2(G, \mathcal{I}_L) \xrightarrow{\text{inv}_K} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow 0. \quad (14)$$

Порівнюючи (13) і (14), одержуємо для циклічного S -розширення поля K :

1. $H^1(\text{Gal}(L/K), C_L) = 0$, (15)
2. $|H^2(\text{Gal}(L/K), C_L)| = [L : K]$.

Зокрема з (15) випливає, що для кожного абелевого S -розширення Галуа L/K існують нормування поля K , що не розпадаються цілком в L . Отже, $\Theta_K : C_K \rightarrow G_K^{ab}$ індукує епіморфізм $\Theta_{L/K} : C_K / N_{L/K} C_L \rightarrow \text{Gal}(L/K)$ для всіх циклічних S -розширень L/K простого степеня, а звідси випливає [8, с.275], що

$\Theta_{L/K}$ – епіморфізм для всіх скінченних абелевих розширень L/K , $[L : K] \in \mathbb{N}^{[S]}$. Тому за "неприємною" лемою [8, с.210] порядки груп $H^0(\text{Gal}(L/K), C_L)$ і $H^2(\text{Gal}(L/K), C_L)$ ділять $[L : K]$ для всіх скінченних S -розширень Галуа L/K . Отже,

$$\Theta_{L/K} : C_K/N_{L/K}C_L \rightarrow \text{Gal}(L/K)$$

– ізоморфізм для всіх скінченних абелевих S -розширень, що і завершує доведення теореми 2.

ЗАУВАЖЕННЯ. Можна показати, наслідуючи Тейта [8, с.295–300], що класи іделів поля алгебраїчних функцій від однієї змінної з S -псевдоскінченним полем констант утворюють формацію класів для S -розширень поля K .

Л І Т Е Р А Т У Р А

1. Rim D.S., Whaples G. Global norm-residue map over quasi-finite fields // Nagoya Math. J. 1966. V.27, N.1. P.323–329.
2. Введенский О.Н. О локальных полях классов эллиптических кривых // Изв. АН СССР, Сер. Матем. 1973. Т.37. С.20–88.
3. Tae Kun Seo, Whaples G. A generalization of global class field theory // Can. J. Math. 1969. V.21. P.609–614.
4. Ax J. The elementary theory of finite fields // Ann. Math. 1968. V. 88, N.2. P.239–271.
5. Serre J.-P. Corps locaux. Paris. Hermann, 1962.
6. Sekiguchi K. Class field theory of p -extension over a formal power series field with a p -quasifinite coefficient field // Tokyo J. Math. 1983. V.6, N.1. P.167–190.
7. Андрійчук В.И. S -квазиконечные поля и поля классов // Международная конференция по алгебре, посвященная памяти А.И.Ширшова. Барнаул, 20–25 августа 1991 г. Тезисы докладов по алгебраической геометрии и применениям алгебры к геометрии, анализу и теоретической физике. С.37.
8. Алгебраическая теория чисел (под. ред. Дж.Касселса и А.Фрелиха).– Москва. Мир, 1969.
9. Lichtenbaum S. Duality theorem for curves over p -adic field // Invent. Math. 1969. V.7. P.120–136.

Department of Mechanics and Mathematics, Lviv University, Universytetska 1, Lviv, 290000, Ukraine

Надійшло 17.11.92