

ПРО НАБЛИЖЕННЯ ДЕЯКИХ ЧИСЕЛ, ЗВ'ЯЗАНИХ З ЕЛІПТИЧНИМИ ФУНКЦІЯМИ ЯКОБІ

Я.М. ХОЛЯВКА

ABSTRACT. Y. Kholiyavka, *On the approximation of certain numbers connected with Jacobi elliptic functions*, Math. Stud. **2** (1993) 10–13.

Let $\operatorname{sn} z$, ω and $\varkappa$ be the notations of the Jacobi elliptic function theory; let β be any complex number different from the poles of $\operatorname{sn} z$. We estimate from below the simultaneous approximation $\varkappa$, ω , β and $\operatorname{sn} \beta$.

Нехай $\operatorname{sn} z$ – еліптична функція Якобі, $\varkappa$ – модуль ($\varkappa \neq 0, 1$), 4ω та $2\omega'$ – довільна фіксована пара основних періодів $\operatorname{sn} z$ (позначення [1, с.216]); $\xi_1, \dots, \xi_4$ – наближаючі алгебраїчні числа, n_i та L_i – їх степені та довжини, $n = \deg \mathbb{Q}(\xi_1, \dots, \xi_4)$.

Теорема. Нехай $\beta \in \mathbb{C}$, β відмінне від полюсів $\operatorname{sn} z$. Тоді

$$|\omega - \xi_1| + |\varkappa - \xi_2| + |\beta - \xi_3| + |\operatorname{sn} \beta - \xi_4| > \exp(-\Lambda T^3), \quad (1)$$

де

$$T = n \left[\frac{\ln L_1}{n_1} + \dots + \frac{\ln L_4}{n_4} + \ln n \right], \quad (2)$$

Λ – деяка ефективна стала.

При доведенні теореми використаємо наступні твердження.

Лема 1. Нехай $s, l \in \mathbb{N}$. Тоді $(\operatorname{sn}^l z)^{(s)} = \mathcal{D}_{s,l}(\varkappa, \operatorname{sn} z, \operatorname{sn}' z)$, де $\mathcal{D}_{s,l} \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$, $\deg_{x_1} \mathcal{D}_{s,l} \leq S$, $\deg_{x_2} \mathcal{D}_{s,l} \leq s + l$, $\deg_{x_3} \mathcal{D}_{s,l} \leq 1$, $L(\mathcal{D}_{s,l}) \leq 4^s 2^l (s + l)!$.

Лема 2. Нехай $P \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$, $P(x_1, x_2) \not\equiv 0$ – многочлен степеня не більше $\mathcal{N}_1$ по x_1 і $\mathcal{N}_2$ по x_2 , $\mathcal{N}_2 \geq 1$, $a \in \mathbb{C}$. Тоді функція $F(z) = P(z, \operatorname{sn}(z+a))$ має не більше $8\mathcal{N}_1\mathcal{N}_2 + 4\mathcal{N}_2 + 2$ нулів (з врахуванням кратності).

Доведення цих тверджень співпадають з доведеннями відповідних властивостей еліптичної функції Вейерштрасса ([2, с.256], [3, с.57]).

Доведення теореми. Припустимо, що для досить великого $\lambda \in \mathbb{N}$

$$|\omega - \xi_1| + |\varkappa - \xi_2| + |\beta - \xi_3| + |\operatorname{sn} \beta - \xi_4| < \exp(-\lambda^{14}T^3). \quad (3)$$

Надалі будемо дотримуватись наступних позначень:

$|f(z)|_{z \in \mathcal{D}} = \sup_{z \in \mathcal{D}} |f(z)|$; $(m, m_1, s) \in \Omega(A, S)$ та $(m, s) \in \Omega(A, S)$ – твірні елементи поля $\mathbb{Q}(\xi_1, \dots, \xi_4)$. Не зменшуючи загальності, можна вважати $\xi_2 \neq 0, 1$.

Розглянемо функцію $\operatorname{sn} z$, модуль якої рівний ξ_2 [1, с.235]. Надалі будемо позначати цю функцію через $\tilde{\operatorname{sn}} z$. Нехай $4\tilde{\omega}$ та $2\tilde{\omega}'$ – деяка пара основних періодів $\tilde{\operatorname{sn}} z$. Використавши [1, с.235], отримаємо оцінку зверху для $|g_i - \tilde{g}_i|$ порядку оцінки (3) ($g_i, \tilde{g}_i$ визначаються по $\varkappa$ і ξ_2 відповідно). Із запису ω та $\tilde{\omega}$ за допомогою еліптичних інтегралів першого роду з g_2, g_3 та $\tilde{g}_2, \tilde{g}_3$ відповідно [1, с.251] випливає, що їх можна вибрати так, щоби виконувалась оцінка

$$|\omega - \tilde{\omega}| + |\omega' - \tilde{\omega}'| < \exp(-\frac{1}{2}\lambda^{14}T^3). \quad (4)$$

Означимо

$$F(z) = \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L C_{k,l} z^k \tilde{\operatorname{sn}}^l z, \quad C_{k,l} = \sum_{\tau=1}^n C_{k,l,\tau}, \quad C_{k,l,\tau} \in \mathbb{Z}; \quad (5)$$

$$F_m(z) = \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L C_{k,l} z^k \tilde{\operatorname{sn}}^l (z - \alpha_m), \quad (6)$$

де $\alpha_m = 4m\tilde{\omega} + \xi_3 - \Theta$, $\tilde{\operatorname{sn}} \Theta = \xi_3$;

$$K = \lambda^6 T^2, \quad S = \lambda^{10} T^2, \quad \mathcal{N} = \lambda T, \quad L = \lambda^6 T, \quad \overline{\mathcal{N}}_1 = \lambda^3 T. \quad (7)$$

Розглянемо $F_m^{(s)}(4m\tilde{\omega} + \xi_3)$, $(m, s) \in \Omega(\mathcal{N}, S)$, як $\mathcal{N}S$ лінійних форм від nKL змінних $C_{k,l,\tau}$. Використавши принцип Діріхле [3, с. 56], виберемо не всі рівні нулю $C_{k,l,\tau}$ такими, що

$$F_m^{(s)}(4m\tilde{\omega} + \xi_3) = 0, \quad |C_{k,l,\tau}| < \exp(\lambda^{9,1} T^2 (\ln T + \sum_{i=1}^4 \frac{\ln L_i}{n_i})). \quad (8)$$

З (3)–(8) і леми 1 отримаємо для $(m, s) \in \Omega(2\overline{\mathcal{N}}_1, S)$

$$|F^{(s)}(4m\tilde{\omega} + \beta) - F_m^{(s)}(4m\tilde{\omega} + \xi_3)| < \exp(-\frac{1}{3}\lambda^{14}T^3). \quad (9)$$

З (8), (9) при $(m, s) \in \Omega(\mathcal{N}, S)$ отримаємо

$$|F^{(s)}(4m\tilde{\omega} + \beta)| < \exp(-\frac{1}{3}\lambda^{14}T^3). \quad (10)$$

Покажемо, що (10) виконується для $(m, s) \in \Omega(\overline{\mathcal{N}}_1, S)$.

Основна Лема. Якщо оцінка (10) вірна для $(m, s) \in \Omega(\overline{\mathcal{N}}_p, S)$, то вона виконується і для $(m, s) \in \Omega(\mathcal{N}_{p+1}, S)$, де $\mathcal{N}_p = 2^p \mathcal{N}$, $2^p < 2\lambda^2$.

Доведення. Нехай $G(z) = F(z)\tilde{\sigma}^L(z - \tilde{\omega}')$, де $\tilde{\sigma}(z)$ визначається числами $\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'$ [1, с.179]. Виберемо найменше можливе ціле r так, щоби в крузі радіуса r містився паралелограм з вершинами $\pm 4(\mathcal{N}_{p+1} + 1)\tilde{\omega} \pm 2(\mathcal{N}_{p+1} + 1)\tilde{\omega}'$ та виконувалась умова $r > |\Theta| + |\beta|$. Позначимо $R = 12r$. Тоді з (5), (7) та оцінок $|\tilde{\mathfrak{N}}z \cdot \tilde{\sigma}(z)|$, $|\tilde{\sigma}(z)|$ зверху (лема 7.1, [4, с.78]) впливає

$$|G(z)|_{|z| < r} < \exp(\lambda^8(2^{2p} + \lambda^{1,1})T^3). \quad (11)$$

Використавши (7), (11) та припущення основної леми, з наслідком формули Ерміта [3, с.59] отримаємо

$$|G^{(s)}(z)|_{|z| \leq r} < \exp(-\lambda^{11}2^p T^3). \quad (12)$$

В досить малому ε -околі точок $4m\tilde{\omega} + 2m_1\tilde{\omega}' + \beta$ функція $\tilde{\sigma}(z - \tilde{\omega}')$ не має нулів, тому з леми 7.1 в [4, с.78], для $|m_1|, |m_1| \leq \mathcal{N}_{p+1}$ впливає

$$|\tilde{\sigma}(z + \tilde{\omega}')|_{z \in V(\varepsilon, 4m\tilde{\omega} + 2m_1\tilde{\omega}' + \beta)} > \exp(-\lambda^8 2^{2p+1} T^3). \quad (13)$$

З (12)–(13) для $(m, s) \in \Omega(\mathcal{N}_{p+1}, S)$ отримаємо

$$|F^{(s)}(4m\tilde{\omega} + \beta)| < \exp(-\frac{1}{2}\lambda^{11}2^p T^3). \quad (14)$$

Враховуючи (9), з (14) для $(m, s) \in \Omega(\mathcal{N}_{p+1}, S)$ впливає

$$|F_m^{(s)}(4m\xi_1 + \xi_3)| < \exp(-\frac{1}{3}\lambda^{11}2^{2p} T^3). \quad (15)$$

Розглядаючи $F_m^{(s)}(4m\xi_1 + \xi_3)$, $(m, s) \in \Omega(\mathcal{N}_{p+1}, S)$ як значення відповідних многочленів в алгебраїчних точках, з [2, с.46], враховуючи (2), (6), (7), отримаємо для $F_m^{(s)}(4m\xi_1 + \xi_3) \neq 0$ оцінку

$$|F_m^{(s)}(4m\xi_1 + \xi_3)| > \exp(-\lambda^9 T^3), \quad (m, s) \in \Omega(2\overline{\mathcal{N}}_1, S). \quad (16)$$

Оцінки (15) та (16) суперечливі, тому

$$F_m^{(s)}(4m\xi_1 + \xi_3) = 0, \quad (m, s) \in \Omega(\mathcal{N}_{p+1}, S). \quad (17)$$

З (9) та (17) отримаємо твердження основної леми.

З (17) при $\frac{1}{2}\lambda^2 \leq 2^p < \lambda^2$ отримаємо, що многочлени $P_m(z, \tilde{\mathfrak{N}}z) = F_m(z)$ мають не менше $\lambda^{13}T^3$ нулів (з врахуванням кратності). З леми 2 отримаємо,

що нулів може бути не більше $9\lambda^{12}T^3$, тому припущення (3) приводить до протиріччя, яке й доводить теорему.

З доведення теореми видно, що оцінка (1) залишається справедливою і для ω' , λ – ефективна постійна, яка залежить від β та $\varkappa$ і визначає Λ . Якщо $\beta = 0$, то $\operatorname{sn} \beta = 0$ і як наслідок з теореми отримаємо оцінку сумісного наближення модуля та одного з періодів $\operatorname{sn} z$. Зауважимо також, що подібним чином можна отримати оцінки чисел, зв'язаних з $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{dn} z$.

Л І Т Е Р А Т У Р А

1. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций.– М.: Наука, 1968.– 648 с.
2. Фельдман Н.И. Седьмая проблема Гильберта.– М.: Изд-во МГУ, 1982.– 311 с.
3. Reyssat E. Approximation algebrique de nombres lies aux fonctions elliptique et exponentielle // Bull. Soc. Math. France. 1980. N.1. P.47–79.
4. Masser D. Elliptic functions and transcendence // Lect. Notes Math. 1975. V.437. P.1–143

Department of Mechanics and Mathematics, Lviv University, Universytetska 1, Lviv, 290602, Ukraine

Надійшло 10.12.1992