УДК 517.946

В.М.ЦИМБАЛ

ПРО ОДНУ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНУ ЗАДАЧУ

В області $D=\{(x,t):\ 0\le x\le l,\ 0\le t\le T\}$ розглядається задача

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon^2\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a(x,t)u=f(x,t), \quad (1)$$

$$u(0,t)=0,\quad \varepsilon^2\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2}=g(t),\quad u(l,t)=0,\quad \frac{\partial^2 u(l,t)}{\partial x^2}=0, \quad (2)$$

$$u(x,0)=0, \quad (3)$$

де $\varepsilon>0$ - малий параметр.

Методом примежового шару [1] побудуемо асимптотику розв'язку задачі (1)-(3). Питання граничного переходу без побудови асимптотики для задачі без малого параметра в граничній умові розглядається в [2].

Нехай виконуються умови:

1. Функції $a(x,t)$, $f(x,t)$, $g(t)$ достатньо гладкі для проведення подальших викладок.

2. $a(x,t)>0$.

3. Виконуються умови узгодженості, які включають умови узгодженості для задачі (1)-(3) $g(0)=0$, а також умови (14).

Зауважимо, що задача (1)-(3) має единий розв'язок [3].

Для побудови асимптотики задача цікава тим, що в асимптотиці разом з функціями звичайного примежового шару (ситуація найбільш вивчена) присутні і функції параболічного примежового шару, а також наявністю малого параметра у граничних умовах, що приводить до так званого явища граничного стрибка.

Розв'язок задачі (1)-(3) шукаємо у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i v_i(x,t) + \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i \Pi_i(x,\tau) + \tag{4}$$
$$+ \sum_{i=0}^{N+2} \varepsilon^2 Q_i^1(\xi,t) + \varepsilon^2 \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i Q_i^2(\eta,t) + R_N(x,t,\varepsilon),$$

де $\tau=t/\varepsilon^2$, $\xi=x/\varepsilon$, $\eta=(l-x)/\varepsilon$, $v_i(x,t)$ $(i=0,\dots,N)$ - функції регулярної частини асимптотики; $\Pi_i(x,\tau)$ - функції параболічного примежового шару в околі $t=0$; $Q_i^1(\xi,t)$, $Q_i^2(\eta,t)$ - функції звичайного примежового шару в околі відповідно $x=0$ і $x=l$; $R_N(x,t,\varepsilon)$ - залишковий член.

Випишемо задачі, з яких визначаються функції, що входять до (4). Їх отримують стандартно.

Функції регулярної частини асимптотики одержують, як розв'язки двоточкових задач для звичайних диференціальних рівнянь (t входить як параметр)

$$-\frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2} + a(x,t)v_i = f_i(x,t) \quad (i=0,\dots,N), \tag{5}$$

$$v_i(0,t)=-Q_i^1(0,t), \quad v_i(l,t)=-Q_{i-2}^2(0,t) \quad (i=0,\dots,N), \tag{6}$$

де $f_0(x,t)\equiv f(x,t)$, $f_i(x,t)=-\left(\frac{\partial v_{i-2}}{\partial t} + \frac{\partial^4 v_{i-2}}{\partial x^4}\right)$ $(i=1,\dots,N)$

у (6) і надалі, функція з від'ємним індексом вважається тотожно рівною 0.

Функції примежового шару $\Pi_i(x,t)$ $(i=0,\dots,N)$ в околі $t=0$ визначаються як розв'язки змішаних задач для параболічних рівнянь

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial x^2} + a(x,0)\Pi_i = \varphi_i(x,\tau), \tag{7}$$

$$\Pi_i(0,\tau)=0, \qquad \Pi_i(l,\tau)=0, \tag{8}$$

$$\Pi_i(x,0)=-\dot{v}_i(x,0), \qquad (9)$$

де $\varphi_0(x,\tau)\equiv 0$, $\varphi_i(x,\tau)$ $(i=1,\dots,N)$ виражаються через $\Pi_j(x,\tau)$ $(j<i)$.

Функції звичайного примежового шару $Q_i^1(\xi,t)$ $(i=0,\dots,N+2)$ в околі $x=0$ визначаються як розв'язки задач для звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^4 Q_i^1}{\partial\xi^4}-\frac{\partial^2 Q_i^1}{\partial\xi^2}=\psi_i(\xi,t), \qquad (10)$$

$$\frac{\partial^2 Q_0^1(0,t)}{\partial\xi^2}=g(t), \quad \frac{\partial^2 Q_i^1(0,t)}{\partial\xi^2}=-\frac{\partial^2 v_{i-2}(0,t)}{\partial x^2} \qquad (11)$$

$$(i=1,\dots,N-2),$$

$$Q_i^1(\xi,t)\xrightarrow[\xi\to\infty]{}0,$$

де $\psi_0(\xi,t)\equiv 0$, $\psi_i(\xi,t)$ $(i=1,\dots,N-2)$ втражається через $Q_j^1(\xi,t)$ $(j<i)$, а функції примежового шару $Q_i^2(\eta,t)$ в околі $x=l$ визначаються як розв'язки аналогічних задач

$$\frac{\partial^4 Q_i^2}{\partial\eta^4}-\frac{\partial^2 Q_i^2}{\partial\eta^2}=\chi_i(\eta,t), \qquad (12)$$

$$\frac{\partial^2 Q_0^2(0,t)}{\partial\eta^2}=-\frac{\partial^2 v_i(l,t)}{\partial x^2}, \quad Q_i^2(\eta,t)\xrightarrow[\eta\to\infty]{}0, \qquad (13)$$

де $\chi_0(\eta,t)\equiv 0$, $\chi_i(\eta,t)$ $(i=1,\dots,N)$ виражаються через $Q_j^2(\eta,t)$ $(j<i)$.

При одержанні попередніх задач суттево вик ористовується, що

$$Q_i^1(\xi,0)=Q_i^2(\eta,0)=\frac{\partial^2\Pi_i(0,\tau)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\Pi_i(l,\tau)}{\partial x^2}=0 \qquad (14)$$

$$(i=1,\dots,N).$$

Ці умови для будь-якого N можна переписати в явному вигляді через вихідні дані задачі (1)-(3), вони громіздкі, тому залишаємо їх у вигляді (14).

Як видно з попередніх формул, усі функції, що входять до (14), визначаються рекурентно у такій послідовності: $Q_0^1(\xi,t)$, $v_0(x,t)$, $\Pi_0(x,\tau)$, $Q_0^2(\eta,t)$, $Q_1^1(\xi,t)$ і т.д.

Двоточкові задачі для звичайних диференціальних рівнянь (5),(6) мають і при тому єдині розв'язки [4].

Відповідні оцінки функцій $\Pi_i(x,\tau)$ $(i=0,\ldots,N)$ випливають з [3]. Те, що функції $Q_i^1(\xi,t)$ $(i=0,\ldots,N+2)$, $Q_i^2(\eta,t)$ $(i=0,\ldots,N)$ є функції примежового шару в околі границь відповідно $x=0$ і $x=l$ доводять стандартно [1].

Зауважимо, що виродженою задачею для (1)-(3) була задача знаходження виродженого рівняння (5)з умовами

$$v_0(0,t) = -g(t) \qquad \text{і} \qquad v_0(l,t) = 0,$$

а не з нульовими граничними умовами, як можна було б сподіватися з умов (2), а $-g(t)$ це і є так званий граничний стрибок.

Для залишкового члена $R_N(x,t,\varepsilon)$ методом інтегралів енергій одержана оцінка

$$\|R_N(x,t,\varepsilon)\|_{L_2(D)} \leq c\ \varepsilon^{N+1}, \qquad (15)$$

де константа c не залежить від ε .

Результат роботи сформулюємо у вигляді теореми.

<u>Теорема</u>. Якщо умови 1)-3) виконуються, тоді розв'язок задачі (1)-(3) допускає асимптотичне представлення (4), де функції визначаються рекурентно у такій послідовності: $Q_0^1(\xi,t)$, $v_0(x,t)$, $\Pi_0(x,\tau)$, $Q_0^2(\eta,t)$, $Q_1^1(\xi,t)$ і т.д.; функції регулярної частини асимптотики визначаються з двоточкових задач для звичайних диференціальних рівнянь (5),(6);

функції примежового шару $\Pi_i(x,t)$ $(i=0,\dots,N)$ в околі $t=0$ - як розв'язки змішаних задач для параболічних рівнянь (7)-(9); функції звичайних примежових шарів $Q_i^1(\xi,t)$ в околі $x=0$ і $Q_i^2(\eta,t)$ в околі $x=l$ - задачами (10),(11) і (12),(13) відповідно; залишковий член $R_N(x,t,\varepsilon)$ має оцінку (15).

Зауваження. Результат роботи анонсований у [5].

Список літератури

1. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром //Успехи мат.наук.- 1957.- Т.12, №5.- С.3-122.
2. Lions J.L. Perturbations Singulieres dans les Problemes aux Limites et en Contrôle Optimal, B: Springer-Verlag, 1973.- 645 p.
3. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа.- М.: Мир, 1968.- 427 с.
4. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения.- М.: Мир, 1970.- 720 с.
5. Цымбал В.Н. Задачи для сингулярно возмущенных уравнений математической физики с малым параметром в граничных условиях //Тез.докл. Сов.-чехословацкого совещания.- Донецк, 1986.- С.139.