УДК 519.24

С.Й.ОСТРОВСЬКА, В.А.РЯБОКОНЬ

ПРО ОДИН КЛАС ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН, БЛИЗЬКИХ ДО ГАУССОВИХ

У роботі досліджуються властивості одного класу випадкових величин, що виникають під час вивчення процесу гальмування автомобіля.

Нехай X_1 та X_2 - незалежні однаково розподілені гауссові випадкові величини з параметрами a та σ. Введемо до розгляду випадкову величину Y_c, яка визначається так:

$$Y_c = \begin{cases} X_2, \text{ якщо } |X_2 - X_1| \le c|X_1|, \\ X_1 + c|X_1|, \text{ якщо } X_2 > X_1 + c|X_1|, \\ X_1 - c|X_1|, \text{ якщо } X_2 < X_1 - c|X_1|, \end{cases} \qquad (1)$$

де $0<c<1$ - параметр, що задає найбільшу можливу відносну похибку між величинами гальмівних сил, що прикладені до коліс однієї осі автомобіля. (Згідно з вимогами ГОСТу для вітчизняних автомобілів c=0,15).

Формула (1) визначає клас випадкових величин, що залежать від параметра c.

У цій роботі отримані формули для функції розподілу та щільності розподілу випадкової величини Y_c, доведемо, що ця випадкова величина не є гауссовою та наведена оцінка рівномірна стосовно x відстані між функціями розподілу випадкової величини Y_c та гауссової випадкової величини з параметрами a та σ.

Будемо використовувати такі позначення:

$$\psi_{a,\sigma}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx,$$

$$\varphi_{a,\sigma}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Ясно, що $\psi'_{a,\sigma}(x)=\varphi_{a,\sigma}(x)$.

<u>Теорема 1.</u> а) Функція розподілу випадкової величини Y_c має вигляд $H_{a,\sigma}(x)$ =

$$=\begin{cases}\psi_{a,\sigma}\left(\frac{x}{1+c}\right)+\psi_{a,\sigma}(x)\left[\psi_{a,\sigma}\left(\frac{x}{1-c}\right)-\psi_{a,\sigma}\left(\frac{x}{1+c}\right)\right], & \text{якщо } x\geq 0\\ \psi_{a,\sigma}\left(\frac{x}{1-c}\right)+\psi_{a,\sigma}(x)\left[\psi_{a,\sigma}\left(\frac{x}{1+c}\right)-\psi_{a,\sigma}\left(\frac{x}{1-c}\right)\right], & \text{якщо } x<0.\end{cases} \tag{2}$$

б) Щільність розподілу випадкової величини Y_c має вигляд $h_{a,\sigma}(x)$ =

$$=\begin{cases}\varphi_{a,\sigma}\left(\frac{x}{1+c}\right)\frac{1}{1+c}+\varphi_{a,\sigma}(x)\left[\psi_{a,\sigma}\left(\frac{x}{1-c}\right)-\psi_{a,\sigma}\left(\frac{x}{1+c}\right)\right]+\\ +\psi_{a,\sigma}(x)\left[\varphi_{a,\sigma}\left(\frac{x}{1-c}\right)\frac{1}{1-c}-\varphi_{a,\sigma}\left(\frac{x}{1+c}\right)\frac{1}{1+c}\right], & \text{якщо } x\geq 0,\\ \varphi_{a,\sigma}\left(\frac{x}{1-c}\right)\frac{1}{1-c}+\varphi_{a,\sigma}(x)\left[\psi_{a,\sigma}\left(\frac{x}{1+c}\right)-\psi_{a,\sigma}\left(\frac{x}{1-c}\right)\right]+\\ +\psi_{a,\sigma}(x)\left[\varphi_{a,\sigma}\left(\frac{x}{1+c}\right)\frac{1}{1-c}-\varphi_{a,\sigma}\left(\frac{x}{1-c}\right)\frac{1}{1-c}\right], & \text{якщо } x<0.\end{cases}$$

<u>Доведення</u>. а) Спочатку розглянемо випадок $x\geq 0$. $H_{a,\sigma}(x)=P(\{Y_c<x\})$. За теоремою додавання ймовірностей

$$P(\{Y_c<x\}) = P(\{Y_c<x, |X_2-X_1|\leq c|X_1|\})+P(\{Y_c<x, X_2>X_1+c|X_1|\})+$$
$$+P(\{Y_c<x, X_2<X_1-c|X_1|\}) = P(\{X_2<x, |X_2-X_1|\leq c|X_1|\})+$$
$$+P(\{(1+c)X_1<x, X_2>X_1+c|X_1|\})+P(\{(1-c)X_1<x, X_2<X_1-c|X_1|\}) =$$
$$=P(\{\vec{X}\in\Delta_x^{(1)}\})+P(\{\vec{X}\in\Delta_x^{(2)}\})+P(\{\vec{X}\in\Delta_x^{(3)}\}) = P(\{\vec{X}\in\Delta_x\}),$$

де $\vec{X}=(X_1,X_2)$ - гауссів випадковий вектор з незалежними однаково розподіленими проекціями

$$\Delta_x^{(1)}=\left\{(x_1,x_2)\,\middle|\; x_2<x,\ |x_2-x_1|\le c\,|x_1|\right\},$$

$$\Delta_x^{(2)}=\left\{(x_1,x_2)\,\middle|\; x_1<\frac{x}{1+c},\ x_2>x_1+c\,|x_1|\right\},$$

$$\Delta_x^{(3)}=\left\{(x_1,x_2)\,\middle|\; x_1<\frac{x}{1-c},\ x_2<x_1-c\,|x_1|\right\},$$

$$\Delta_x=\Delta_x^{(1)}\cup\Delta_x^{(2)}\cup\Delta_x^{(3)}.$$

Після обчислення $P(\{\vec{X}\in\Delta_x\})=\iint\limits_{\Delta_x}P(x_1,x_2)dx_1dx_2$ отримаємо потрібну формулу для $H_{a,\sigma}(x)$ для $x\ge 0$.

Якщо $x<0$, то множина Δ_x має вигляд

$$\Delta_x=\Delta_x^{(1)}\cup\Delta_x^{(2)}\cup\Delta_x^{(3)},$$

де

$$\Delta_x^{(1)}=\left\{(x_1,x_2)\,\middle|\; x_2<x,\ |x_2-x_1|\le c\,|x_1|\right\},$$

$$\Delta_x^{(2)}=\left\{(x_1,x_2)\,\middle|\; x_1<\frac{x}{1-c},\ x_2>x_1+c\,|x_1|\right\},$$

$$\Delta_x^{(3)}=\left\{(x_1,x_2)\,\middle|\; x_1<\frac{x}{1+c},\ x_2<x_1-c\,|x_1|\right\}.$$

Вираз для $H_{a,\sigma}(x)$ при $x<0$ отримаємо, якщо обчислимо $P(\{\vec{X}\in\Delta_x\})$.

б) Формулу для щільності розподілу отримаємо після диференціювання $H_{a,\sigma}(x)$.

Теорему доведено.

В [1] і [2] було розглянуто проблему опису перетворень, що переводять гауссів випадковий вектор у гауссову випадкову величину. Ця проблема, наскільки нам відомо, до цього часу не вирішена. Наступна теорема твердить, що перетворення (1) не має цієї властивості.

Теорема 2. Y_c не буде гауссовою випадковою величиною для жодного значення математичного сподівання та дисперсії.

Доведення. Припустимо, що $H_{a,\sigma}(x)$ є функцією розподілу деякої гауссової випадкової величини. Тоді $H_{a,\sigma}(x)$ є цілою функцією стосовно x. У той же час згідно з (2), $H_{a,\sigma}(x)$ зображається на правій та лівій півосях різними виразами, обидва з'яких є цілими функціями щодо x. За теоремою єдиності аналітичних функцій одержуємо, що

$$\psi_{a,\sigma}\left(\frac{x}{1+c}\right)+\psi_{a,\sigma}(x)\left[\psi_{a,\sigma}\left(\frac{x}{1-c}\right)-\psi_{a,\sigma}\left(\frac{x}{1+c}\right)\right] \equiv$$

$$\equiv \psi_{a,\sigma}\left(\frac{x}{1-c}\right)+\psi_{a,\sigma}(x)\left[\psi_{a,\sigma}\left(\frac{x}{1+c}\right)-\psi_{a,\sigma}\left(\frac{x}{1-c}\right)\right]$$

звідки $\psi_{a,\sigma}\left(\frac{x}{1+c}\right) \equiv \psi_{a,\sigma}\left(\frac{x}{1-c}\right)$.

Оскільки $c\neq 0$, то одержуємо суперечність.

Теорему доведено.

Теорема 3. Справедлива така оцінка, рівномірна стосовно x:

$$|H_{a,\sigma}(x)-\psi_{a,\sigma}(x)|\leq C(a,\sigma)\frac{c}{1-c} ,$$

де
$$C(a,\sigma)= \frac{8}{\sqrt{2\pi}}\, max\left(\frac{a}{\sigma} , \frac{1}{\sqrt{e}}\right) .$$

Доведення. Розглянемо $|H_{a,\sigma}(x)-\psi_{a,\sigma}(x)| = \left|\psi_{a,\sigma}\left(\frac{x}{1+c}\right)-\psi_{a,\sigma}(x)+\psi_{a,\sigma}(x)\left[\psi_{a,\sigma}\left(\frac{x}{1-c}\right)-\psi_{a,\sigma}\left(\frac{x}{1+c}\right)\right]\right|$, якщо $x\geq 0$; $|H_{a,\sigma}(x)-\psi_{a,\sigma}(x)| = \left|\psi_{a,\sigma}\left(\frac{x}{1-c}\right)-\psi_{a,\sigma}(x)+\psi_{a,\sigma}(x)\left[\psi_{a,\sigma}\left(\frac{x}{1+c}\right) - \psi_{a,\sigma}\left(\frac{x}{1-c}\right)\right]\right|$, якщо $x<0$. В обох випадках $|H_{a,\sigma}(x)-\psi_{a,\sigma}(x)|\leq$ $\leq (1+\psi_{a,\sigma}(x))\left|\psi_{a,\sigma}\left(\frac{x}{1-c}\right)-\psi_{a,\sigma}\left(\frac{x}{1+c}\right)\right|\leq 2\left|\psi_{a,\sigma}\left(\frac{x}{1-c}\right)-\psi_{a,\sigma}\left(\frac{x}{1+c}\right)\right|$.

Щоб дати оцінку виразу, який стоїть з правого боку, розіб'емо числову пряму на інтервали $]-\infty;0[$, $[0;\frac{a}{2}(1-c)]$,

$\left[\frac{a}{2}(1-\varepsilon);2a(1+\varepsilon)\right]$, $[2a(1+\varepsilon);+\infty[$. Розглянемо потрібну різницю на кожному інтервалі окремо. При $x<0$ за теоремою Лагранжа отримаемо

$$\left|\psi_{a,\sigma}\left(\frac{x}{1-\varepsilon}\right)-\psi_{a,\sigma}\left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right)\right|\le\psi'_{a,\sigma}\left(\frac{x}{1+\theta\varepsilon}\right)\ \left|\frac{2\varepsilon x}{1-\varepsilon^2}\right|\le\left|\varphi_{a,\sigma}\left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right)x\right|\ \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\le$$

$$\le\frac{1+\varepsilon}{\sqrt{2\pi e}}\ \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon^2}=\sqrt{\frac{2}{\pi e}}\ \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}, \qquad (-1<\theta<1).$$

Повторюючи ці міркування для інтервалів $\left[0;\frac{a}{2}(1-\varepsilon)\right]$ та $[2a(1+\varepsilon);+\infty[$, отримаемо

$$\left|\psi_{a,\sigma}\left(\frac{x}{1-\varepsilon}\right)-\psi_{a,\sigma}\left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right)\right|\le\frac{1+\varepsilon}{\sqrt{2\pi e}}\ \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

На інтервалі $\left[\frac{a}{2}(1-\varepsilon);2a(1+\varepsilon)\right]$ отримаемо

$$\left|\psi'_{a,\sigma}\left(\frac{x}{1+\theta\varepsilon}\right)x\right|\le\varphi_{a,\sigma}(x)2a(1+\varepsilon)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,2a(1+\varepsilon)\ , \text{ тобто}$$

$$\left|\psi_{a,\sigma}\left(\frac{x}{1-\varepsilon}\right)-\psi_{a,\sigma}\left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right)\right|\le\frac{4a}{\sqrt{2\pi}\sigma}\ \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

Отже, для всіх x маемо

$$|H_{a,\sigma}(x)-\psi_{a,\sigma}(x)|\le C(a,\sigma)\,\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon},$$

де
$$C(a,\sigma)=\frac{8}{\sqrt{2\pi}}\max\left(\frac{a}{\sigma},\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right).$$

Теорему доведено.

Список літератури

1. Линник Ю.В., Эйдлин В.Л. Об аналитических преобразованиях нормальных векторов //Теория вероятности и ее применение.- 1968.- Т.13, №4.- С.751-754.
2. Логвиненко В.Н., Островский И.В., Ронкин Л.И. Об аналитических преобразованиях нормального вектора //Докл. АН СССР.- 1970.- Т.195, №6.- С.1270-1273.