УДК 517.956

Г.П. ЛОПУШАНСЬКА

ПРО ІСНУВАННЯ І ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЇ ГРІНА ЗАДАЧІ СПРЯЖЕННЯ ДЛЯ РІВНЯННЯ МІШАНОГО ТИПУ

Нехай Ω - область в R^n, обмежена n-1-вимірною замкненою гіперповерхнею $\partial\Omega$ класу C^∞, σ - замкнена нескінченно диференційовна гіперповерхня всередині Ω, $\Omega=\Omega_1 \cup \sigma \cup \Omega_2$, $\partial\Omega_1=\sigma$, $\Omega_2=\Omega\setminus\bar{\Omega}_1$, $Q=\Omega\times(0;T)$, $Q_{0r}=\Omega_r\times(0;T)$, $Q_{11}=\sigma\times(0;T)$, $Q_{12}=\partial\Omega\times(0;T)$, $Q_{2r}=\Omega_r$, $r=1,2$.

В Q розглядається задача

$$
\begin{gathered}
L^{(r)}u \equiv k^{(r)}(x,t)u_{tt}^{(r)}+\alpha^{(r)}(x,t)u_t^{(r)}+A^{(r)}u^{(r)}=F_0^r, \quad (x,t)\in Q_{0r},\\
B_1u \equiv \lambda^{(1)}(x,t)u^{(1)}-\lambda^{(1)}(x,t)u^{(2)}=F_{11}^1,\\
B_2u \equiv \frac{\partial u^{(1)}}{\partial N^{(1)}}-\frac{\partial u^{(2)}}{\partial N^{(2)}}=F_{11}^2, \quad (x,t)\in Q_{11}, \qquad (1)\\
u^{(2)}(x,t)=F_{12}, \quad (x,t)\in Q_{12},\\
u^{(r)}\Big|_{t=0}=F_{20}^r, \quad u_t^{(r)}\Big|_{P_{0r}^-}=F_{21}^r, \quad r=1,2,
\end{gathered}
$$

де

$$
A^{(r)}u = \sum_{i,j=1}^n \left(a_{ij}^{(r)}(x,t)u_{x_i}\right)_{x_j}+\sum_{i=1}^n a_i^{(r)}(x,t)u_{x_i}+a^{(r)}(x,t) -
$$

рівномірно еліптичні оператори, $\frac{\partial}{\partial N^{(r)}}=\sum_{i=1}^n a_i^{(r)}(x,t)\,\nu_j\,\frac{\partial}{\partial x_i}$,

$\vec{\nu}$ - нормаль до Q_{11} (Q_{12}), зовнішня стосовно Q_{01} (Q), усі коефіцієнти операторів вважаємо нескінченно диференційовними в області їх визначення, $k^{(r)}(x,t)$ довільно всередині Q змінює знак, $k^{(r)}(x,0)\le 0$, $k^{(r)}(x,T)\le 0$, $P_{0r}^-=\{(x,0):\ x\in\Omega_r,\ k^{(r)}(x,0)>0\}$, аналогічно визначаємо

P^-_{Tr} , $r=1,2$, $u(x,t)=u^{(r)}(x,t)$, $(x,t)\in\bar{Q}_{0r}$.

Нехай $D(\bar{Q}_{01}, \bar{Q}_{02})$ правильна формула Гріна

$$\sum_{r=1}^{2}\int\limits_{Q_{0r}}\left(L^{(r)}u^{(r)}v^{(r)}-u^{(r)}L^{(r)*}v^{(r)}\right)dxdt=$$

$$=\int\limits_{Q_{11}}\left[\sum_{r=1}B_r u\ \hat{c}_r v+\frac{\partial u^{(2)}}{\partial N^{(2)}}\left(v^{(1)}-v^{(2)}\right)+u^{(2)}\hat{B}v\right]dxdt+$$

$$+\int\limits_{Q_{12}}\left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial N^{(2)}}v^{(2)}-u^{(2)}c_2v^{(2)}\right)dxdt+$$

$$\sum_{r=1}^{2}\int\limits_{Q_{2r}}\left\{k^{(r)}u_t^{(r)}v^{(r)}+\left[a^{(r)}v^{(r)}-\left(k^{(r)}v^{(r)}\right)_t u^{(r)}\right\}\right|_{t=0}^{t=T}dx$$

де

$$\hat{c}_1 v=-\frac{1}{\lambda^{(1)}}c_1v^{(1)},\qquad \hat{c}_2v^{(2)}=v^{(2)},$$

$$\hat{B}v=\frac{1}{\lambda^{(1)}}\left(\lambda^{(1)}c_2v^{(2)}-\lambda^{(2)}c_1v^{(1)}\right),$$

$$c_rv^{(r)}=\frac{\partial v^{(r)}}{\partial N^{(r)}}-\sum_{i=1}^{n}a_i^{(r)}(x,t)\,\nu_iv^{(r)}\ ,\ r=1,2$$

Звідси видно, що задача

$$L^{(r)*}\psi=\varphi^{(r)}(x,t)\ ,\ (x,t)\in Q_{0r}$$

$$\hat{B}\psi\Big|_{t=T}=\psi_t^{(r)}\Big|_{P^-_{Tr}}=0\ ,\qquad \psi^{(2)}\Big|_{Q_{12}}=0\ ,$$

$$\psi^{(r)}\Big|_{t=T}=\psi_t^{(r)}\Big|_{P^-_{Tr}}=0\ ,\ r=1,2\ ,$$

є спряженою до задачі (1).

У [1,2] розглянуто окремі випадки існування і единості розв'язку задачі (1) і (3) у деяких нормованих функціональних просторах, зокрема у просторах гладких функцій. Нехай $\mathring{D}(\bar{Q}_{01}, \bar{Q}_{02}) = \{\varphi\in D(\bar{Q}_{01},\bar{Q}_{02}) : D_t^p\varphi\big|_{t=T}=0$,

$p=0,1,\dots)$, $\mathcal{D}(\overline{Q}_{1j})=\{\varphi\in C^{\infty}(\overline{Q}_{1j}) : D_t^p\varphi\big|_{t=T}=0$, $p=0,1,\dots\}$, $j=1,2$; $X(\overline{Q}_{01},\overline{Q}_{02})=\{\varphi\in\mathcal{D}(Q_{01},Q_{02}) :(\varphi^{(1)}-\varphi^{(2)})\big|_{Q_{11}}=\hat{B}\varphi\big|_{Q_{11}}=$ $=\varphi^{(2)}\big|_{Q_{11}}=\hat{B}\varphi\big|_{Q_{11}}=\varphi^{(2)}\big|_{Q_{12}}=0\}$, $Y(\overline{Q}_{01},\overline{Q}_{02})=\{\varphi\in D(\overline{Q}_{01},\overline{Q}_{02})$: $B_1\varphi\big|_{Q_{11}}=B_2\varphi\big|_{Q_{11}}=\varphi^{(2)}\big|_{Q_{12}}=\varphi^{(r)}\big|_{t=0}=\varphi_t^{(r)}\big|_{P_{0r}^-}=0$, $r=1,2\}$.

Далі штрихами позначаемо простори лінійних неперервних функціоналів на відповідних просторах основних функцій, а через $(\varphi,F)=\sum_{r=1}^{2}(\varphi^{(r)},F^r)$ - дію узагальненої вектор-функції F на основну вектор-функцію φ .

Припускаемо, що: 1) коефіцієнти $a_{ij}^{(r)}$, $a_i^{(r)}$, $\lambda^{(r)}$ не залежать від t ; 2) $k_{tt}^{(r)}-a_t^{(r)}+a^{(r)}\le b_c^{(r)}<0$, $(k_{tt}^{(r)}-a_t^{(r)}+a^{(r)})_t\le 0$, $\min\limits_{\overline{Q}_{0r}}\left[\left(p+\frac{3}{2}\right)k_t^{(r)}-a^{(r)}\right]\ge\delta_p^{(r)}>0$, $p=0,1,\dots,$ $\lambda^{(r)}\left(\frac{3}{2}\ k_t^{(r)}-a^{(r)}\right)+\dfrac{4b_0^{(r)}}{\delta_0^{(r)}}>0$ в $Q_{0r}^+=$ $=\{(x,t)\in\overline{Q}_{0r}:\ k^{(r)}(x,t)>0\}$ або $k^{(r)}\le 0$ в $\overline{Q}_{0r}$ і існують сталі $c_c^{(r)}\ge 0$, такі, що $\left(p+\frac{3}{2}\right)k_t^{(r)}-a^{(r)}-\dfrac{c_0^{(r)}k^{(r)}}{2}>0$ в $\overline{Q}_{0r}$, $p=0,1,\dots$ (тоді, на підставі теореми 7 або 8 із [2] для довільної $\varphi\in\mathcal{D}(\overline{Q}_{01},\overline{Q}_{02})$ існує единий розв'язок $\psi\in\mathcal{D}(\overline{Q}_{01},Q_{02})$ задачі (3)); 3) $a^{(r)}\le a_c^{(r)}<0$, $a_t^{(r)}\ge 0$,

$\min\limits_{\overline{Q}_{0r}}\left[a^{(r)}-\left(p-\frac{1}{2}\right)k_t^{(r)}\right]\ge\gamma_p^{(r)}>0$, $p=0,1,\dots,$

$\lambda^{(l)}\left[a^{(r)}+\frac{1}{2}k_t^{(r)}\right]+\dfrac{4a_0^{(r)}}{\gamma_0^{(r)}}>0$ в Q_{0r}^+ , $l,r=1,2$, $l\ne r$

або $k^{(r)}\le 0$ в $\overline{Q}_{0r}$ і існують сталі $c_c^{(r)}\ge 0$, такі, що $a^{(r)}-\left(p-\frac{1}{2}\right)k_t^{(r)}>0$ в $\overline{Q}_{0r}$, $p=0,1,\dots$ (тоді однозначно розв'язувана задача (1) при $F^r_{11}=F_{12}=F^r_{2k}=0$, $r=1,2$, $k=0,1$ і $F_0 \in \overset{\circ}{D}(\bar{Q}_{01},\bar{Q}_{02})=\{\varphi(x,t) \in D(\bar{Q}_{01}, \bar{Q}_{02}): D^p_t\varphi\big|_{t=0}=0,$ $p=0,1,\ldots\}$).

Функцією Гріна задачі (1) називається, як відомо, пара функцій $(G_1(x,t;y,\tau), G_2(x,t;y,\tau))=G(x,t;y,\tau)$, визначених для $(y,\tau) \in \bar{Q}_{01}\cup \bar{Q}_{02}$, $(x,t) \in \bar{Q}_{01}$ і $(x,t) \in \bar{Q}_{02}$ відповідно, які задовольняють задачі

$$L^*_{x,t}\, G_r(x,t;y,\tau)=\begin{cases} \delta(x-y,t-\tau), & (y,\tau) \in Q_{0r}\ , \\ 0\ , & (y,\tau) \bar{\in} Q_{0r}\ , \end{cases} \tag{4}$$

$G_1=G_2$, $\hat{B}_{x,t}G(x,t;y,\tau)=0$, $(x,t) \in Q_{11}$, $G_2=0$, $(x,t) \in Q_{12}$, $G_r\big|_{t=T} = \dfrac{\partial G_r}{\partial t}\Big|_{P^-_{Tr}}=0$, $r=1,2$.

<u>Теорема</u>. У даних припущеннях існує єдина функція Гріна задачі (1), вона належить $\overset{\circ}{D}'(\bar{Q}_{01},\bar{Q}_{02})$ як функція (x,t) .

Єдиність можна довести за схемою [3,4]. Доведемо існування. Для кожної $\eta(x,t) \in Y(\bar{Q}_{01},\bar{Q}_{02})$ маємо

$$(L\eta,G)=(\eta,L^*G)=\eta^{(r)}(y,\tau), \quad (y,\tau) \in Q_{0r}\ . \tag{5}$$

Розглянемо δ-видну послідовність $\varphi_n(x,t;y,\tau) \in \overset{\circ}{D}(\bar{Q}_{01},\bar{Q}_{02})$ при $(y,\tau) \in Q_0\setminus Q_{11}$ (існування її випливає із леми 1 [1]). Тоді $(\eta(x,t), \varphi_n(x,t;y,\tau)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \eta^{(r)}(y,\tau)$, $(y,\tau) \in \bar{Q}_{0r}$ $\forall\eta \in D(\bar{Q}_{01},\bar{Q}_{02})$, а значить, і для кожної $\eta \in Y(\bar{Q}_{01},\bar{Q}_{02})$. Нехай $\psi_n(x,t;y,\tau)$ - розв'язок задачі (3) при $\varphi=\varphi_n(x,\tau,y,\tau)$, тоді $L^*\psi_n=\varphi_n$ і

$$(\eta(x,t),L^*_{x,t}\,\psi_n(x,t;y,\tau) \to \eta^{(r)}(y,\tau),\ (y,\tau) \in Q_{0r}$$
$$\forall\eta \in Y(\bar{Q}_{01},\bar{Q}_{02}) \tag{6}$$

із формули Гріна

$(\eta(x,t), L^*_{x,t}\psi_n(x,t;y,\tau)) = (L\eta(x,t), \psi_n(x,t;y,\tau))$, тому віднімаючи (5) і (6), матимемо

$(L\eta, G-\psi_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0, \quad (y,\tau) \in Q_{0r}, \quad r=1,2, \quad \eta \in Y(\bar{Q}_{01}, \bar{Q}_{02}).(7)$

Оскільки за припущенням для довільної $\varphi \in \overset{\circ}{D}(\bar{Q}_{01}, \bar{Q}_{02})$, така, що $L\eta(x,t)=\varphi(x,t)$ в $Q\setminus Q_{11}$, то з (7) отримуємо існування в $\overset{\circ}{D}'(\bar{Q}_{01}, \bar{Q}_{02})$ $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(x,t;y,\tau)=G$. А з властивостей ψ_n випливає, що $G(x,t;y,\tau) \in X(\bar{Q}_{01}, \bar{Q}_{02})$ при $(x,t)\neq(y,\tau)$.

Аналогічно [3-5] доводяться такі тотожності для функції Гріна і довільної $\psi \in X(\bar{Q}_{01}, \bar{Q}_{02})$:

$$\sum_{r=1}^{2} \left(L^{(r)*}\psi^{(r)}(x,t), G_p(y,\tau;x,t)\right) = \psi^{(p)}(y,\tau), \quad (y,\tau) \in \bar{Q}_{0p},$$

$$\sum_{r=1}^{2} \left(L^{(r)*}\psi^{(r)}(x,t), \hat{c}_{P(y,\tau)}G(y,\tau;x,t)\right) = \hat{c}_p\psi(y,\tau),$$

$$(y,\tau) \in \bar{Q}_{11}, \quad p=1,2, \tag{8}$$

$$\sum_{r=1}^{2} \left(L^{(r)*}\psi^{(r)}(x,t), c_{2(y,\tau)}G_2(y,\tau;x,t)\right) = c_2\psi^{(2)}(y,\tau),$$

$$(y,\tau) \in \bar{Q}_{12}.$$

Нехай $F_0 \in X'(\bar{Q}_{01}, \bar{Q}_{02})$, $F^r_{11} \in \overset{\circ}{D}'(Q_{11})$, $F_{12} \in \overset{\circ}{D}'(Q_{12})$, $F_{2j} \in (C^\infty(\bar{Q}_{2r}))$, $supp\ F^r_{21} \subset P^-_{0r}$, $r=1,2$, $j=0,1$. Узагальнена функція $u \in D'(\bar{Q}_{01}, \bar{Q}_{02})$ називається розв'язком задачі (1), а сама задача - узагальненою мішаною задачею, якщо

$$(L^*\psi, u) = (\psi, F_0) - \sum_{r=1}^{2} \left(\hat{c}_r\psi, F^r_{11}\right) + \left(\hat{c}_2\psi^{(2)}, F_{12}\right) +$$
$$+ \sum_{r=1}^{2} \left[\alpha^{(r)}(x,0)\psi^{(r)}(x,0) - \left(k^{(r)}\psi^{(r)}\right)_t\Big|_{t=0}, F^r_{20}\right] +$$
$$+ \sum_{r=1}^{2} \left(k^{(r)}(x,0)\psi^{(r)}(x,0), F^r_{21}\right) \quad \forall\psi \in X(\bar{Q}_{01}, Q_{02}).$$

За допомогою функції Гріна, використовуючи її властивості, зокрема (8), аналогічно [3-5] можна довести існування і отримати зображення єдиного розв'язку узагальненої мішаної задачі.

Список літератури

1. Каратопраклиева М.Г. К теории уравнений смешанного типа с разрывными коэффициентами. 1//Дифференц.уравнения.- 1987.- Т.23, №1.- С.85-102.
2. Каратопраклиева М.Г. К теории уравнений смешанного типа с разрывными коэффициентами. 2//Дифференц.уравнения.- 1988.- Т.24, №1.- С.91-105.
3. Гупало А.С., Лопушанская Г.П. Об одном представлении решения обобщенной граничной задачи для эллиптической по Петровскому системы дифференциальных уравнений //Укр.мат. журн.- 1985.- Т.37, №1.- С.128-131.
4. Лопушанская Г.П. О решении с помощью матрицы Грина параболической граничной задачи в пространстве обобщенных функций //Укр.мат.журн.- 1986.- Т.33, №6.- С.795-798.
5. Лопушанская Г.П. Об одном представлении решения первой смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка в пространстве обобщенных функций //Львов.ун-т.- Львов,1986.- 12 с.- Деп. в УкрНИИНТИ 29.09.86, №2358-Ук86.