УДК 517.946

В.Г.КОСТЕНКО

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ТЕПЛОВОЛОГОПЕРЕНОСУ НА ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ У КРАЙОВІЙ УМОВІ ТРЕТЬОГО РОДУ

Розглядається задача на визначення функцій $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$, $\alpha_1(t)$ і $\beta_2(t)$ з умов

$$\begin{aligned} &\frac{1}{a_1}\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - b_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \qquad 0<x<h, \quad t>-\infty, \\ &\frac{1}{a_2}\frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - b_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \qquad 0<x<h, \quad t>-\infty, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &\left.\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \alpha_1(t)u_1 + \alpha_2(t)u_2\right)\right|_{x=0} = \mu_1(t), \qquad t>-\infty, \\ &\left.\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \beta_1(t)u_1 + \beta_2(t)u_2\right)\right|_{x=0} = \mu_2(t), \qquad t>-\infty, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &u_1\big|_{x=h} = \nu_1(t), \qquad u_2\big|_{x=h} = \nu_2(t), \qquad t>-\infty \\ &\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=h} = \gamma_1(t), \qquad \left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=h} = \gamma_2(t), \qquad t>-\infty. \end{aligned} \tag{3}$$

При цьому сталі коефіцієнти a_i, b_i, а також функції $\beta_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\nu_i(t)$, $\mu_i(t)$ $(i=1,2)$ припускаються заданими.

Спочатку знаходимо розв'язок задачі Коші для системи рівнянь (1) з початковими умовами (3), використовуючи для цієї мети символічний метод [1].

Вводимо в розгляд інтегральний оператор

$$Iu = \int_x^h u(\alpha, t)d\alpha \qquad (4)$$

і застосовуємо його послідовно два рази до системи (1), враховуючи при цьому (3). У результаті маємо

$$\frac{1}{\alpha_1} I^2 \frac{\partial u_1}{\partial t} = u_1 - b_2 u_2 - \nu_1(t) + b_2\nu_2(t) - I\gamma_1(t) + b_2 I\gamma_2(t) ,$$

$$\frac{1}{\alpha_2} I^2 \frac{\partial u_2}{\partial t} = u_2 - b_1 u_1 - \nu_2(t) + b_1\nu_1(t) - I\gamma_2(t) + b_1 I\gamma_1(t)$$

і після введення оператора

$$B_1 u = I \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} Iu \qquad (5)$$

одержуємо звідси систему інтегро-диференціальних рівнянь

$$\left(1 - \frac{IB_1}{\alpha_1}\right)u_1 - b_2 u_2 = \nu_1(t) - b_2\nu_2(t) + I(\gamma_1(t) - b_2\gamma_2(t)) ,$$

$$(6)$$

$$\left(1 - \frac{IB_1}{\alpha_2}\right)u_2 - b_1 u_1 = \nu_2(t) - b_1\nu_1(t) + I(\gamma_2(t) - b_1\gamma_1(t)) ,$$

еквівалентну задачі (1),(3).

У (5) формально замінюємо B_1 і I відповідно параметрами λ_1 і λ_2, що призводить до

$$\left(1 - \frac{\lambda_1\lambda_2}{\alpha_1}\right)\bar{u}_1(t,\lambda_1,\lambda_2) - b_2\bar{u}_2(t,\lambda_1,\lambda_2) = \nu_1(t) - b_2\nu_2(t) +$$

$$+ \lambda_2(\gamma_1(t) - b_2\gamma_2(t)) ,$$

$$(7)$$

$$\left(1 - \frac{\lambda_1\lambda_2}{\alpha_2}\right)\bar{u}_2(t,\lambda_1,\lambda_2) - b_1\bar{u}_1(t,\lambda_1,\lambda_2) = \nu_2(t) - b_1\nu_1 t)$$

$$+ \lambda_2(\gamma_2(t) - b_1\gamma_1(t)) .$$

Цим самим для нових невідомих функцій $\bar{u}_1(t,\lambda_1,\lambda_2)$ і $\bar{u}_2(t,\lambda_1,\lambda_2)$ одержано систему лінійних алгебраїчних рівнянь, розв'язок якої для достатньо малих за модулем комплексних параметрів λ_1 і λ_2 зображається у вигляді

$$\bar{u}_1(t,\lambda_1,\lambda_2) = \frac{\left(1 - \frac{\lambda_1\lambda_2}{a_2}\right)\left[\lambda_2(\gamma_1(t)-b_2\gamma_2(t))+\nu_1(t)-b_2\nu_2(t)\right]}{\Delta} +$$

$$+ \frac{b_2\left[\lambda_2(\gamma_2(t)-b_1\gamma_1(t))+\nu_2(t)-b_1\nu_1(t)\right]}{\Delta}, \quad (8)$$

$$\bar{u}_2(t,\lambda_1,\lambda_2) = \frac{\left(1 - \frac{\lambda_1\lambda_2}{a_1}\right)\left[\lambda_2(\gamma_2(t)-b_1\gamma_1(t))+\nu_2(t)-b_1\nu_1(t)\right]}{\Delta} +$$

$$+ \frac{b_1\left[\lambda_2(\gamma_1(t)-b_2\gamma_2(t))+\nu_1(t)-b_2\nu_2(t)\right]}{\Delta},$$

де $\Delta=(1-b_1b_2)\left[1 - \frac{\lambda_1\lambda_2}{a_1a_2(1-b_1b_2)}(a - \lambda_1\lambda_2)\right]$, $a=a_1+a_2$, $(1-b_1b_2)\neq 0$. При цьому в достатньо малій околиці $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$ маємо

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{1-b_1b_2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i c_n^i \frac{a^{n-i}}{(a_1a_2)^n(1-b_1b_2)}\lambda_1^{n+i}\lambda_2^{n+i}. \quad (9)$$

У припущенні, що функції $\nu_i(t)$, $\gamma_i(t)$ $(i=1,2)$ аналітичні, розв'язок задачі (1),(3) знаходимо формулами обернення виду

$$u_1(x,t)= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{c_1}\frac{d\lambda_1}{\lambda_1}\int_{c_2}\frac{d\lambda_2}{\lambda_2}\left\{\bar{u}_1\left(t+\frac{x-h}{\lambda_1},\lambda_1,\lambda_2\right) +\right.$$

$$\left.+ \frac{1}{\lambda_2}\int_{h}^{x} e^{\frac{a_1-h}{\lambda_2}}\bar{u}_1\left(t+\frac{x-a_1}{\lambda_1},\lambda_1,\lambda_2\right)da_1\right\},$$

$$u_2(x,t)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{c_1}\frac{d\lambda_1}{\lambda_1}\int\limits_{c_2}\frac{d\lambda_2}{\lambda_2}\left\{\bar{u}_2\left(t+\frac{x-h}{\lambda_1},\lambda_1,\lambda_2\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\lambda_2}\int\limits_h^x e^{\frac{\alpha_1-h}{\lambda_2}}\bar{u}_2\left(t+\frac{x-\alpha_1}{\lambda_1},\lambda_1,\lambda_2\right)d\alpha_1\right\},$$

де c_1 і c_2 - кола достатньо малого радіуса з центрами у нулі і розміщені у комплексних площинах λ_1 і λ_2 відповідно.

Використовуючи теорію лишків і розклад підінтегральних функцій у ряди, перетворюємо (10) у ряди за степенями $x-h$ з коефіцієнтами, залежними від t

$$u_1(x,t)=\nu_1(t)+\gamma_1(t)(x-h)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i c_n^i\frac{a^{n-i}}{(a_1a_2)^n(1-b_1b_2)^n}\left\{\nu_1^{(n+i)}(t)\frac{(x-h)^{2(n+i)}}{(2n+2i)!}+\right.$$

$$\left.+\gamma_1^{(n+i)}(t)\frac{(x-h)^{2(n+i)+1}}{(2n+2i+1)!}\right\}+\frac{1}{a_2(1-b_1b_2)}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i c_n^i\frac{a^{n-i}}{(a_1a_2)^n(1-b_1b_2)^n}\left\{\left(b_2\nu_2^{(n+i+1)}(t)-\nu_1^{(n+i+1)}(t)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{(x-h)^{2(n+i+1)}}{(2n+2i+2)!}+\left(b_2\gamma_2^{(n+i+1)}(t)-\gamma_1^{(n+i+1)}(t)\right)\frac{(x-h)^{2(n+i)+3}}{(2n+2i+3)!}\right\},$$

(11)

$$u_2(x,t)=\nu_2(t)+\gamma_2(t)(x-h)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i c_n^i\frac{a^{n-i}}{(a_1a_2)^n(1-b_1b_2)^n}\left\{\nu_2^{(n+i)}(t)\frac{(x-h)^{2(n+i)}}{(2n+2i)!}+\right.$$

$$+ \gamma_2^{(n+i)}(t) \frac{(x-h)^{2(n+i)+1}}{(2n+2i+1)!}\Bigg\} + \frac{1}{a_1(1-b_1b_2)} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i c_n^i \frac{a^{n-i}}{(a_1a_2)^n(1-b_1b_2)^n} \left\{ \left[b_1\nu_1^{(n+i+1)}(t) - \nu_2^{(n+i+1)}(t) \right] \times \right.$$

$$\left. \times \frac{(x-h)^{2(n+i+1)}}{(2n+2i+2)!} + \left[b_1\gamma_1^{(n+i+1)}(t) - \gamma_2^{(n+i+1)}(t) \right] \frac{(x-h)^{2(n+i)+3}}{(2n+2i+3)!} \right\}.$$

Доведемо, що (11) - розв'язок задачі (1),(3) і тим самим (10) - формули обернення. Спочатку в (11) вибираємо доданки, що містять у коефіцієнтах лише функцію $\nu_1(t)$ та її похідні

$$u_{1,1}(x,t) = \nu_1(t) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i c_n^i \frac{a^{n-i}}{(a_1a_2)^n(1-b_1b_2)^n} \nu_1^{(n+i)}(t) \frac{(x-h)^{2(n+i)}}{(2n+2i)!} -$$

$$- \frac{1}{a_2(1-b_1b_2)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i c_n^i \frac{a^{n-i}}{(a_1a_2)^n(1-b_1b_2)^n} \nu_1^{(n+i+1)}(t) \times$$

$$\times \frac{(x-h)^{2(n+i+1)}}{(2n+2i+2)!}, \qquad (12)$$

$$u_{2,1}(x,t) = \frac{b_1}{a_1(1-b_1b_2)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i c_n^i \frac{a^{n-i}}{(a_1a_2)^n(1-b_1b_2)^n} \times$$

$$\times \nu_1^{(n+i+1)}(t) \frac{(x-h)^{2(n+i+1)}}{(2n+2i+2)!}.$$

Після підстановки (12) у ліву частину першого рівняння системи (1), зведення подібних і належної заміни індексів сумування одержуємо

$$\frac{1}{a_1}\frac{\partial u_{1,1}}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_{1,1}}{\partial x^2} + b_2\frac{\partial^2 u_{2,1}}{\partial x^2} =$$

$$= \left[\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2(1-b_1b_2)} + \frac{b_1b_2}{a_1(1-b_1b_2)}\right]\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i c_n^i\frac{a^{n-i}}{(a_1a_2)^n(1-b_1b_2)^n}\nu_1^{(n+i+1)}(t)\frac{(x-h)^{2(n+i)}}{(2n+2i)!} -$$

$$-\frac{a_1+a_2}{a_1a_2(1-b_1b_2)}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i c_{n+1}^i\frac{a^{n-i}}{(a_1a_2)^n(1-b_1b_2)^n}\times$$

$$\times\nu_1^{(n+i+1)}(t)\frac{(x-h)^{2(n+i)}}{(2n+2i)!} + \frac{a_1+a_2}{a_1a_2(1-b_1b_2)}\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}(-1)^i c_n^{i-1}\frac{a^{n-i}}{(a_1a_2)^n(1-b_1b_2)^n}\nu_1^{(n+i+1)}(t)\frac{(x-h)^{2(n+i)}}{(2n+2i)!} = 0$$

Тут коефіцієнти при $\nu_1^{(n+i+1)}(t)\frac{(x-h)^{2(n+i)}}{(2n+2i)!}$, де n - довільне натуральне число, а $i\neq 0$, $i\neq n+1$ мають вигляд

$$\frac{a^{n-i}}{(a_1a_2)^n(1-b_1b_2)^n}(-1)^i\left\{c_n^i\left[\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2(1-b_1b_2)} + \frac{b_1b_2}{a_1(1-b_1b_2)}\right] -\right.$$

$$\left. - c_{n+1}^i\frac{a_1+a_2}{a_1a_2(1-b_1b_2)} + c_n^{i-1}\frac{a_1+a_2}{a_1a_2(1-b_1b_2)}\right\}$$

і, легко бачити, що всі вони є нулі у зв'язку з тим, що $c_{n+1}^i = c_n^i + c_n^{i-1}$. При $i=0$ і n - довільному натуральному коефіціенті при $\nu_1^{(n+1)}(t)\,\dfrac{(x-h)^{2n}}{(2n)!}$ е вираз

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2(1-b_1b_2)}+\frac{b_1b_2}{a_1(1-b_1b_2)}-\frac{a_1+a_2}{a_1a_2(1-b_1b_2)}=0\ .$$

І, нарешті, при довільному натуральному n і $i=n+1$ коефіціент при $\nu_1^{(2n+2)}(t)\,\dfrac{(x-h)^{2(2n+1)}}{(4n+2)!}$ також е нуль, тому що він мае вигляд

$$\frac{1}{(a_1a_2)^n(1-b_1b_2)^n}\left[(-1)^n\frac{1}{a_1a_2(1-b_1b_2)}-(-1)^n\frac{1}{a_1a_2(1-b_1b_2)}\right].$$

Аналогічно переконуемося, що (12) задовольняе і друге рівняння системи (1). Легко також бачити, що функції (12) при $x=h$ задавольняють умови $u_{1,1}\big|_{x=h}=\nu_1(t)$, $u_{2,1}\big|_{x=h}=0$, $\dfrac{\partial u_{1,1}}{\partial x}\Big|_{x=h}=0$, $\dfrac{\partial u_{2,1}}{\partial x}\Big|_{x=h}=0$.

Так само можна перевірити, що сума доданків з (11), що містять у коефіціентах лише функцію $\varphi_2(t)$ та її похідні, е розв'язком системи (1) і при $x=h$ задовольняють умови: $u_{1,2}\big|_{x=h}=0$, $u_{2,2}\big|_{x=h}=\nu_2(t)$, $\dfrac{\partial u_{1,2}}{\partial x}\Big|_{x=h}=0$, $\dfrac{\partial u_{2,2}}{\partial x}\Big|_{x=h}=0$; сума доданків з (11), що містять у коефіціентах лише функцію $\gamma_1(t)$ та її похідні - розв'язок системи (1) з умовами при $x=h$: $u_{1,3}\big|_{x=h}=0$, $u_{2,3}\big|_{x=h}=0$, $\dfrac{\partial u_{1,3}}{\partial x}\Big|_{x=h}=\gamma_1(t)$, $\dfrac{\partial u_{2,3}}{\partial x}\Big|_{x=h}=0$; сума доданків з (11), що містять у коефіціентах лише функцію $\gamma_2(t)$ та її похідні - розв'язок системи (1) з умовами при $x=h$:

$$u_{1,4}\big|_{x=h}=0\ ,\ u_{2,4}\big|_{x=h}=0_2,\ \frac{\partial u_{1,4}}{\partial x}\Big|_{x=h}=0\ ,\ \frac{\partial u_{2,4}}{\partial x}\Big|_{x=h}=\gamma_2$$

Звідси, як наслідок, маемо що (11) - розв'язок задачі

(1),(3) і (10) - формули обернення.

З (11) знаходимо $u_1(0,t)$, $u_2(0,t)$, $\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=0}=0$, $\left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=0}=0$ і потім використовуємо їх для визначення $\alpha_1(t)$ і $\beta(t)$ з (2)

$$\alpha_1(t) = \frac{\mu_1(t) - \left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=0} - \alpha_2(t) u_2(0,t)}{u_1(0,t)},$$

$$\beta_2(t) = \frac{\mu_2(t) - \left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=0} - \beta_1(t) u_1(0,t)}{u_2(0,t)},$$

якщо $u_1(0,t)$, $u_2(0,t)\neq 0$.

Зокрема, якщо $\beta_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\nu_i(t)$, $\gamma_i(t)$, $\mu_i(t)$ ($i=1,2$) не залежать від t, то $\alpha_1(t)$ і $\beta_2(t)$ також не будуть залежати від t, причому

$$\alpha_1 = \frac{\mu_1 - \alpha_2(\nu_2 - h\gamma_2) + h\gamma_1}{\nu_1 - h\gamma_1}, \qquad \beta_2 = \frac{\mu_2 - \beta_1(\nu_1 - h\gamma_1) + h\gamma_2}{\nu_2 - h\gamma_2},$$

якщо $\nu_1 - h\gamma_1$, $\nu_2 - h\gamma_2 \neq 0$.

Припустимо, наприклад, що в (2) коефіцієнти $\beta_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ задані і неперервні, а $\nu_i(t)$, $\gamma_i(t)$ ($i=1,2$) аналітичні для $t>-\infty$. Тоді допоміжна задача (1),(3) є задачею Коші для лінійної системи рівнянь типу Ковалевської зі сталими коефіцієнтами, розв'язок якої у класі аналітичних функцій є единим і стійким. Цей розв'язок і знайдено за допомогою введених тут формул обернення (10), які є деякою модифікацією відомих формул Фантап'е [1]. За цих умов коефіцієнти $\alpha_1(t)$ і $\beta_2(t)$ умови (2), виражені формулами (13), є функціями неперервними для $t>-\infty$.

Єдиність і стійкість розв'язку (13) досліджуваної оберненої задачі також є наслідком відповідних властивостей розв'язку допоміжної задачі (1),(3).

Список літератури

1. Леви П. Кокретные проблемы функционального анализа. М.:Наука, 1967, С.