УДК 519.21

Б. І. КОПИТКО

БАГАТОВИМІРНІ ДИФУЗІЙНІ ПРОЦЕСИ З ЧАСТКОВО ВІДБИВАЮЧИМ ЕКРАНОМ НА ГІПЕРПЛОЩИНІ

В області $D_i = \{x: \ x=(x_1,\dots,x_m) \in R^m, \ (-1)^i x_m>0\}$, $i=1,2$ скінченно-вимірного евклідового простору R^m, $m\geq 2$ заданий дифузійний процес, керований еліптичним оператором

$$L_i = \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^{m} b_{kj}^{(i)} \frac{\partial^2}{\partial x_k \, \partial x_j},$$

причому матриця $B_i = \left(b_{kj}^{(i)}\right)$ є сталою, симетричною і додатньо визначеною.

Поставимо задачу, описатти деякий клас неперервних процесів Феллера в R^m, які в областях D_1 і D_2 співпадають із заданими дифузійними процесами. Для її розв'язку використаемо методи теорії параболічних рівнянь з розривними коефіцієнтами. Відзначимо, що випадок, коли $B_1=B_2=B$ і при цьому B - змінна, достатньо регулярна матриця, розглядався в [1]. Одновимірний випадок вивчався в роботах [2,3].

Позначимо через $\mathfrak{B}(R^m)$ банахів простір всіх дійсних обмежених функцій на R^m з нормою $\| \varphi \| = \sup_{x \in R^m} |\varphi(x)|$. Визначимо на $\mathfrak{B}(R^m)$ півгрупу операторів T_t , $t>0$ за формулою

$$T_t \varphi(x) = \int_{R^m} g_i(t, x-y) \varphi(y)\, dy +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{R^{m-1}} g_i(t-\tau, x'-y', x_m) V_i(\tau, y', \varphi)\, dy' , \qquad (1)$$

$$i=1,2\ , \qquad\qquad x=(x',x_m)\in D_i\ ,$$

де

$$g_i(t,x-y)=g_i(t,x'-y',x_m-y_m)=$$

$$=(2\pi t)^{-\frac{m}{2}}(\det B_i)^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2t}\left(B_i^{-1}(y-x),(y-x)\right)\right\}$$

звичайний фундаментальний розв'язок оператора $\frac{\partial}{\partial t}-L_i$, а V_1 і V_2 -невідомі функції, які будемо шукати з наступних умов склеювання на поверхні $R^{m-1}=\{x:\ x\in R^m,\ x_m=0\}$:

$$T_t\ \varphi(x',-0)=T_t\ \varphi(x',+0)\ ,$$
$$q_1\frac{\partial T_t\ \varphi(x',-0)}{\partial N_1}+q_2\frac{\partial T_t\ \varphi(x',+0)}{\partial N_2}=0\ ,\ t>0\ ,\ x'\in R^{m-1}\ . \tag{2}$$

Тут q_1 і q_2 - задані дійсні числаб N_i, $i=1,2$ - вектор конормалі. В нашому випадку $N_i=B_i\ \nu$, де $\nu=(0,\dots,0,1)\in R^m$ - одиничний вектор нормалі до поверхні R^{m-1} , а похідна від деякої функції $v(x)$, $x\in R^m$, в напрямі конормалі N_i визначаеться за формулою

$$\frac{\partial v(x)}{\partial N_i}=\sum_{k=1}^{m}b_{km}^{(i)}\ \frac{\partial v(x)}{\partial x_k}\ .$$

З теорії теплових потенціалів відомо, що коли $\varphi(x)$ обмежена і неперервна на R^m, а $V_i(t,x',\varphi)$ обмежена для $t\geq 0$, $x'\in R^{m-1}$, то функція $T_t\ \varphi(x)$ задовільняе в області $t>0$, $x\in D_i$ рівняння

$$\frac{\partial T_t\ \varphi(x)}{\partial t}-L_i\ T_t\ \varphi(x)=0$$

і початкову умову

$$\lim_{t\downarrow 0}T_t\ \varphi(x)=\varphi(x)\ .$$

Умови (2) з врахуванням співвідношень, які отримуються з теореми про скачок конормальної похідної від потенціалу простого шару [4], приводить до системи інтегральних рівнянь Вольтерра 1-го роду відносно V_1 і V_2 :

$$\int_0^t d\tau \int_{R^{m-1}} [q_2 q_1(t-\tau, x'-y', 0) - q_1 q_2(t-\tau, x'-y', 0)] V_i(\tau, y', \varphi) dy' =$$

$$= f_i(t, x', \varphi), \qquad i=1,2, \qquad (3)$$

де

$$f_i(t, x', \varphi) =$$

$$= q_{3-i} \Phi(t, x', \varphi) + \int_0^t d\tau \int_{R^{m-1}} g_{3-i}(t-\tau, x'-y', 0) \psi(\tau, y', \varphi) dy',$$

$$\Phi(t, x', \varphi) = \int_{R^m} [g_2(t, x'-y', y_m) - g_1(t, x'-y', y_m)] \varphi(y) dy,$$

$$\Psi(t, x', \varphi) = \int_{R^m} \left[q_1 \frac{\partial g_1(t, x'-y', y^m)}{\partial N_1} + q_2 \frac{\partial g_2(t, x'-y', y^m)}{\partial N_2} \right] \varphi(y) dy .$$

Далі, позначивши $\gamma_1 = -\dfrac{q_1}{(b_{mm}^{(2)})^{1/2}}$, $\gamma_2 = -\dfrac{q_2}{(b_{mm}^{(1)})^{1/2}}$, і, припустивши, що $\gamma_i = 0$, $i=1,2$, з метою перетворення системи рівнянь (3) введемо інтегро-диференціальний оператор ξ, який діє за правилом

$$\xi(t, x') f = (2\pi)^{-1/2} \sum_{l=1}^{2} \mu_l(t, x') \int_0^t (t-\tau)^{-1/2} d\tau \times$$

$$\times \int_{R^{m-1}} \left[\frac{1}{\gamma_{3-l}} G_l(t-\tau, x'-y') - \right. \qquad (4)$$

$$\left. - \frac{1}{2} \gamma_l^2 \int_0^1 \frac{G(t-\tau, x'-y', \beta) d\beta}{[\gamma_1^2 \beta + \gamma_2^2 (1-\beta)]^{3/2}} \right] f(\tau, y') dy', \qquad t>0, \quad x' \in R^{m-1}.$$

Тут $G_l(t, x'-y')$ $(t>0,\ x', y' \in R^{m-1})$ - фундаментальний розв'язок рівномірно параболічного оператора

$$\mu_l = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^{m-1} c_{kj}^{(l)} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j}, \qquad l=1,2$$

з коефіцієнтами

$$c_{kj}^{(l)} = \left(b_{kj}^{(l)} - \frac{b_{km}^{(l)} b_{jm}^{(l)}}{b_{mm}^{(l)}} \right), \qquad k,j=1,2,\ldots,m-1;\ l=1,2\ ,.$$

$G(t,x'-y',\beta)$, $(t>0,\ x',y' \in R^{m-1})$ - фундаментальний розв'язок рівномірно параболічного оператора

$$\mu = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^{m-1} c_{kj} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j}$$

з коефіцієнтами

$$c_{kj} = (1-\beta) c_{kj}^{(1)} + \beta\, c_{kj}^{(2)}, \qquad k,j=1,2,\ldots,m-1.$$

Застосовуючи ξ до обох частин системи рівнянь (3), одержимо единий розв'язок в явному вигляді

$$V_i(t,x',\varphi) = \xi(t,x') f_i\ , \qquad i=1,2\ . \qquad (5)$$

У випадку , коли один з параметрів q_1 або q_2 дорівнює нулю, то функції V_1 і V_2 визначаються з формул

$$V_i(t,x',\varphi) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{\gamma_{3-i}} \mu_i(t,x') \int_0^t (t-\tau)^{-1/2} d\tau\ \times$$

$$\times \int_{R^{m-1}} G_i(t-\tau,x'-y') f_i(\tau,y',\varphi) f_i\, dy'\ ,$$

$$V_{3-i}(t,x',\varphi) = \frac{1}{q_{3-i}} \psi(t,x',\varphi)\ , \qquad i=1,2\ ,$$

причому тут слід покласти $i=1$ ($i=2$), якщо $q_1=0$ ($q_2=0$) .

Дальший аналіз побудованої півгрупи дає можливість сформулювати теорему.

<u>Теорема.</u> Нехай в евклідовому просторі R^m, $m\geq 2$, задана додатно-визначена матричнозначна функція $B(x)=B_i$, $x \in D_i$,

$i=1,2$, а параметри q_1 і q_2 з (2) зв'язані умовою

$$q_1 q_2 \le 0 \qquad (q_1^2+q_2^2\ne 0) . \tag{6}$$

Тоді півгрупа операторів (1),(5) породжує клас неперервних процесів Феллера в R^m, імовірність переходу яких $P(t,x,dy)$ задовольняє наступним співвідношенням

$$\lim_{t\downarrow 0} \int_{R^m} \varphi(x) \left[\frac{1}{t} \int_{R^m} (y-x,\theta) P(t,x,dy)\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\left[\left(b_{mm}^{(1)}\right)^{1/2}+\left(b_{mm}^{(2)}\right)^{1/2}\right]\left(q_1 N_1 + q_2 N_2, \theta\right)}{q_2 \left(b_{mm}^{(2)}\right)^{1/2} - q_1 \left(b_{mm}^{(1)}\right)^{1/2}} \int_{R^{m-1}} \varphi(x',0)dx' ,$$

$$\lim_{t\downarrow 0} \int_{R^m} \varphi(x) \left[\frac{1}{t} \int_{R^m} (y-x,\theta)^2 P(t,x,dy)\right] dx = \int_{R^m} \varphi(x)(B(x)\theta,\theta)dx ,$$

які б не були $\theta \in R^m$ і фінітна неперервна функція $\varphi(x)$ з дійсними значеннями.

Для доведення теореми спочатку встановлюємо, що побудована півгрупа дійсно визначена на $\mathfrak{B}(R^m)$. Для цього достатньо довести лише існування потенціалу простого шару в (1). Останній факт випливає з нерівності

$$|V_i(t,x',\varphi)| \le K \, \| \varphi \| \, t^{-1/2}, \tag{8}$$

де $t>0$, $\varphi \in \mathfrak{B}(R^m)$, K - деяка константа. Дійсно, для $t>0$ маємо

$$V_i(t,x',\varphi)=(2\pi)^{-1/2}\left\{\sum_{l=1}^{2} t^{-2} \int_0^t \left[t\mu_l(t,x')(t-\tau)^{1/2} - (t-\tau)^{1/2} -\right.\right.$$

$$\left. -\tau(t-\tau)^{-1/2}\right] d\tau \int_{R^{m-1}} \left[\frac{1}{\gamma_{3-l}} G_l(t-\tau,x'-y') -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \gamma_l^2 \int_0^1 \frac{G(t-\tau,x'-y',\beta)d\beta}{\left[\gamma_1^2\beta+\gamma_2^2(1-\beta)\right]^{3/2}}\right] f_i(\tau,y',\varphi)dy' + \tag{9}$$

$$+\sum_{l=1}^{2} t^{-1}\int_0^t (t-\tau)^{-1/2}d\tau \int_{R^{m-1}}\left[\frac{1}{\gamma_{3-l}} G_l(t-\tau,x'-y') -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\gamma_l^2\int_0^1 \frac{G(t-\tau,x'-y',\beta)d\beta}{[\gamma_1^2\beta+\gamma_2^2(1-\beta)]^{3/2}}\right]\mu_l(\tau,y')[\tau\ f_i(\tau,y',\varphi)]dy'\Big\} .$$

Тоді потрібна оцінка для кожного з доданків (9), а значить, і для функції $V_i(t,x',\varphi)$, випливає з оцінок для фундаментальних розв'язків параболічних рівнянь [4].

Далі, використовуючи (9), доводимо, що якщо послідовність функцій $\varphi_n(x)$ з простору $\mathfrak{B}(R^m)$ така, що $\varphi_n(x)\to\varphi(x)$, $\varphi\in\mathfrak{B}(R^m)$, для кожного $x\in R^m$, коли $n\to\infty$, і $\sup_{n,x}|\varphi_n(x)|<\infty$, то $\lim_{n\to\infty} V_i(t,x',\varphi_n)=V_i(t,x',\varphi)$, а тому $\lim_{n\to\infty} T_t\varphi_n(x)=T_t\varphi(x)$. Якщо виконується умова (6), то півгрупа T_t, $t\geq 0$ залишає конус невід'ємних функцій інваріантним. Обгрунтування цього факту з очевидними змінами проводиться за схемою доведення леми в праці [3]. Безпосередньою перевіркою встановлюємо, що для функції $\varphi_0(y)\equiv 1$, $V_i(t,x',\varphi_0)\equiv 0$, $i=1,2$, а тому $T_t\varphi_0(x)\equiv 1$. З наведених властивостей півгрупи слідує, що вона визначає деякий однорідний, необривний, Феллерівський процес. Якщо позначити його імовірність переходу через $P(t,x,dy)$, то можна записати

$$T_t\varphi(x)=\int_{R^m}\varphi(y)P(t,x,dy) .$$

Висновок про те, що траєкторії процесу є неперервними випливає з оцінки

$$\sup_{x\in R^m}\int_{R^m}|y-x|^4 P(t,x,dy)\leq K\ t^2. \qquad (10)$$

Для доведення (10) зафіксуємо деяке $\bar{x} \in R^m$ і визначимо функцію

$$\varphi_{\bar{x}}(y)=|y-\bar{x}|^4, \qquad y \in R^m.$$

Підставляючи $\varphi_{\bar{x}}(y)$ в формули для $f_i(t,x',\varphi)$ і, використовуючи (9), а також відповідні оцінки для фундаментальних розв'язків параболічних рівнянь одержуємо нерівності

$$|f_i(t,x',\varphi_{\bar{x}})|\le K\left(t^2+|x'-\bar{x}|^4\right), \qquad i=1,2 ,$$

$$|V_i(t,x',\varphi_{\bar{x}})|\le K\left(|x'-\bar{x}|^4+t^2\right)t^{-1/2}, \qquad i=1,2 .$$

Таким чином для $t>0$, $\bar{x} \in R^m$ маємо

$$\int_{R^m} |y-\bar{x}|^4 P(t,\bar{x},dy)=T_t\varphi_{\bar{x}}(\bar{x})\le K\ t^2+$$

$$+\int_0^t d\tau \int_{R^{m-1}} (t-\tau)^{-m/2} \exp\left\{-h\ \frac{|y'-\bar{x}|^2}{t-\tau}\right\}\left[\tau^{3/2}+|y'-\bar{x}|^4\tau^{-1/2}\right]dy' ,$$

$$h>0 .$$

Звідки і випливає властивість (10).

Нарешті, підрахунок дифузійних коефіцієнтів приводить до співвідношень (7), які означають, що побудований процес є узагальненою дифузією в розумінні М.І.Портенка [1]. Для цього матриця дифузії дорівнює $B(x)$, а вектор переносу дорівнює

$$\frac{1}{2}\ \frac{\left[\left(b_{mm}^{(1)}\right)^{1/2}+\left(b_{mm}^{(2)}\right)^{1/2}\right]\left(q_1N_1+q_2N_2\right)}{q_2\left(b_{mm}^{(2)}\right)^{1/2}-q_1\left(b_{mm}^{(1)}\right)^{1/2}}\ \delta_{R^{m-1}}(x) ,$$

де $\delta_{R^{m-1}}(x)$ - узагальнена функція, зосереджена на поверхні R^{m-1}.

Список літератури

1. Портенко Н.И. Обобщенные диффузионные процессы.- Киев: Наук.думка, 1982.- 307 с.
2. Langer H., Schenk W. Knotting of one-dimensional Feller processers //Math.Nachr.- 1983.- Vol.113.- P.151-161.
3. Копытко Б.И. О склеивании двух неоднородных диффузионных процессов на прямой //УМЖ.- 1983.- 35.- С.156-164.
4. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.- М.: Наука, 1967.- 736 с.