УДК 517.53

А.А.КОНДРАТЮК, С.І.ТАРАСЮК

ПОРІВНЯННЯ ЛЕБЕГОВИХ СЕРЕДНІХ І НЕВАНЛІННІВСЬКОЇ ХАРАКТЕРИСТИКИ СУБГАРМОНІЙНИХ ФУНКЦІЙ

Нехай u - субгармонійна в $\mathbb{R}^m$ функція, $m\geq 2$, $u(0)=0$, S - одинична сфера в $\mathbb{R}^m$, $|S|$ - площа її поверхні. Позначимо

$$m_q(r,u)=\left\{\frac{1}{|S|}\int_S |u(rx)|^q dS(x)\right\}^{\frac{1}{q}}, \quad 1\leq q<+\infty, \quad r>0,$$

$u^+=max(u,0)$, $m_\infty(r,u)=B(r,u)=max\{u(rx): x\in S\}$. Тоді $m_1(r,u^+)=T(r,u)$, де $T(r,u)$ - неванліннівська характеристика функції u, і з огляду на монотонність $m_q(\text{к},u)$ по q маємо

$$T(r,u)\leq m_q(r,u)\leq B(r,u)$$

Відомо [1, с.166], що

$$B(r,u)\leq \frac{\sigma^{m-2}(\sigma+1)}{(\sigma-1)^{m-1}}T(\sigma r,u), \quad \sigma>1, \quad r>0. \quad (1)$$

Виникає питання про порівняння лебегових середніх $m_q(r,u^+)$ та $m_q(r,u)$ з $T(r,u)$.

Число, спряжене до q, позначимо через q', $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$.

<u>Теорема 1.</u> Нехай u - субгармонійна в $\mathbb{R}^m$ функція, $m\geq 2$, $u(0)=0$, $1\leq q<\infty$, $\sigma>1$. Тоді для всіх $r>0$ виконується

$$m_q(r,u^+)\leq (T(r,u))^{\frac{1}{q}}\left\{\frac{\sigma^{m-2}(\sigma+1)}{(\sigma-1)^{m-1}}T(\sigma r,u)\right\}^{\frac{1}{q'}}. \quad (2)$$

Різниця субгармонійних функцій називається δ-субгармонійною функцією.

<u>Теорема 2.</u> Нехай u - δ-субгармонійна в $\mathbb{C}$ функція, $u(0)=0$, $\sigma>1$, $1\leq q<+\infty$. Тоді

$$m_q(r,u) \le \frac{A_q(\sigma)}{(\sigma-1)^{1/q'}} T(\sigma r,u) , \ r>0 , \qquad (3)$$

$$A_q(\sigma)=\begin{cases} (\sigma-1)^{\frac{1}{q'}}+\left(2^{q'+1}(\sqrt{\sigma}+1)\right)^{\frac{1}{q'}}+(2q\sigma)^{\frac{1}{q'}} , & 2\le q<+\infty . \\ 2\left(A_2(\sigma)\right)^{\frac{1}{q'}} , & 1\le q<2 . \end{cases}$$

При $q=2$ нерівність (3) зі сталою, близькою до $A_q(\sigma)$, одержана в [2].

<u>Теорема 3.</u> Нехай u - необмежена зверху субгармонійна в $\mathbb{R}^m$ функція , $m\ge 2$, $1\le q<+\infty$. Тоді для довільного $\alpha > \frac{m-1}{q'}$ виконується

$$\lim_{r\to\infty} \frac{m_q(r,u^+)}{T(r,u)(\ln T(r,u))^{\alpha}} = 0 .$$

<u>Теорема 4.</u> Нехай u - субгармонійна в $\mathbb{R}^m$ функція порядку $\rho\ge 0$, $m\ge 2$, $1\le q\le +\infty$. Тоді

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{m_q(r,u^+)}{T(r,u)} \le \left\{ C(\rho,m) \right\}^{\frac{1}{q'}},$$

де

$$C(\rho,m) = \inf_{\sigma>1} \frac{\sigma^{m-2+\rho}(\sigma+1)}{(\sigma-1)^{m-1}} .$$

<u>Теорема 5.</u> Нехай u - δ-субгармонійна в $\mathbb{C}$ функція, $1\le q<+\infty$. Тоді для довільного $\alpha > \frac{1}{8}$, виконується

$$\lim_{r\to\infty} \frac{m_q(r,u)}{T(r,u)(\ln T(r,u))^{\alpha}} = 0 .$$

<u>Теорема 6.</u> Нехай u - δ-субгармонійна в $\mathbb{C}$ функція порядку $\rho\ge 0$, $1\le q<+\infty$. Тоді

$$\underline{\lim_{r\to\infty}}\ \frac{m_q(r,u)}{T(r,u)} \le D_q(\rho)$$

де

$$D_q(\rho) = \inf_{\sigma>1} \frac{\sigma^\rho A_q(\sigma)}{(\sigma-1)^{1/q'}} .$$

Зауваження 1. При $q=+\infty$, $m=2$ теорема 3 встановлена в [3] (див. також [4, с.43]). При $q=2$ теорема 5 встановлена в [2]. Можна сказати, що сталі $\frac{m-1}{q'}$ у теоремі 3 і $\frac{1}{q'}$ в теоремі 5 точні (при $m=2$ див.[4, с.126-128]. Сталі $C(\rho,m)$ у теоремі 4 і $D_q(\rho)$ в теоремі 6 при $\rho>0$, $q>1$ не найкращі. При $\rho=0$ стала $C(0,m)=1$ точна. При $m=2$ точна оцінка зверху нижньої границі відношення $m_q(r,u^+)/T(r,u)$ для функцій скінченного нижнього порядку одержана в [12]. Там же описані екстремальні функції.

Зауваження 2. Питання про порівняння $m_q(r,u^+)$ і $B(r,u)$ для субгармонійних функцій скінченного нижнього порядку λ зводиться до відомої проблеми Пелі, яка розв'язана в [5-7]. Дійсно, оскільки u - субгармонійна, то і $(u^+)^q$ субгармонійна, $1\le q\le+\infty$, $m_q(r,u^+)=T(r,(u^+)^q)$, $B(r,(u^+)^q)=(B(r,u))^q$. Нижній порядок функції $(u^+)^q$ дорівнює $q\lambda$. Отже, при $m=2$ із урахуванням результатів [5-6] маємо

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\ \frac{m_q(r,u^+)}{B(r,u)} \ge \begin{cases} \left(\dfrac{\sin \pi q\lambda}{\pi\lambda}\right)^{1/q}, & \lambda \le \dfrac{1}{2q} , \\ \left(\dfrac{1}{\pi q\lambda}\right)^{1/q}, & \dfrac{1}{2q} < \lambda < +\infty . \end{cases}$$

Оцінка точна.

Зауваження 3. Теорема 4 справедлива для субгармонійних, а теорема 6 для δ-субгармонійних функцій скінченного нижнього порядку за Пойа λ_* [8] із заміною в них ρ на λ_*. Це випливає з існування і властивостей піків Пойя порядку λ_* [8].

Доведення теореми 1. Скористаємося нерівністю опуклості для лебегових норм (середніх)

$$\| f \|_q \le \| f \|_p^{1-\theta} \| f \|_s^{\theta} \qquad (4)$$

при $\frac{1}{q'} = (1-\theta)\frac{1}{p'} + \theta \frac{1}{s'}$, $0<\theta<1$, де f - інтегрована в довільному степені функція. Нерівність (4) випливає з нерівності Гельдера (див. також [9 с.10], [10, с.236]. Вона залишається справедливою, якщо f крім того обмежена майже скрізь і p чи s дорівнює $+\infty$.

Покладемо в (4) $p=1$, $s=+\infty$, $f=u^+(rx)$. Тоді $\frac{1}{q'} = \theta$, $1-\theta = \frac{1}{q}$. Враховуючи (1), з (4) одержимо (2).

Доведення теореми 2. Для δ-субгармонійної в $\mathbb{C}$ функції через $c_h(r,u)$ позначимо її коефіцієнти Фур'є,

$$c_k(r,u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r e^{i\varphi})\, e^{-ik\varphi}\, d\varphi , \quad k \in \mathbb{Z} ,$$

$\mu = \mu^+ - \mu^-$ - розклад Жордана заряду Рісса $\mu = \frac{1}{2\pi}\Delta u$, де Δ - оператор Лапласа в сенсі узагальнених функцій. Тоді при $\sigma>0$, $k \in \mathbb{N}$ виконується [2] (див. також [11, с.141])

$$|c_k(r,u)| \le \sigma^{-k}|c_k(\sigma r, u)| + \frac{1}{2k}(1-\sigma^{-2k})\, n(\sigma r),$$

де $n(R)=n(R,\mu^+)+n(R,\mu^-)$, $n(R,\mu^+)$ - μ^+-міра круга радіуса R. Оскільки (див., наприклад, [11]) $|c_k(R,u)|\le 2T(R,u)$, $n(R)\ln\sigma \le N(\sigma R)$, то

$$|c_k(r,u)| \le 2T(\sigma^2 r, u)\left\{\sigma^{-k} + \frac{1-\sigma^{-2k}}{2k\ln\sigma}\right\}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad r > 0 .$$

Нехай $q\geq 2$. Скористаемося нерівністю Хаусдорфа-Юнг

$$m_q(r,\omega) \leq \left\{\sum_{k\in Z} |c_k(r,\omega)|^{q'}\right\}^{\frac{1}{q'}}.$$

Враховуючи співвідношення $c_{-k}= \bar{c}_k$, $|c_0(r,\omega)|\leq T(r,\omega)$ і нерівність Мінковського, маемо

$$m_q(r,\omega) \leq T(\sigma^2 r,\omega)\left\{1 + 2^{q'+1}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sigma^{-k}+ \frac{1-\sigma^{-2k}}{2k\ \ln\sigma}\right]^{q'}\right\}^{\frac{1}{q'}} \leq$$

$$\leq T(\sigma^2 r,\omega)\left\{1 + \left\{\frac{2^{q'+1}}{\sigma^{q'}-1}\right\}^{\frac{1}{q'}}+ \frac{2^{\frac{q'+1}{q'}}}{2\ \ln\sigma}\ (\psi(\sigma^{-2}))^{\frac{1}{q'}}\right\}, \quad (5)$$

де
$$\psi(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-t^k)^{q'}}{k^{q'}}, \qquad 0<t<1 .$$

Диференціюючи цей ряд почленно і використовуючи оцінку $\left(\frac{1-t^k}{k}\right)^{q'-1}\leq (1-t)^{q'-1}$ одержуемо

$$|\psi'(t)| \leq q'(1-t)^{q'-1}\sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1}= q'(1-t)^{q'-2} .$$

Звідси і з огляду на нерівність $\psi'(t)<0$, знаходимо

$$\psi(t)-\psi(u) \leq q'\int_t^u (1-\tau)^{q'-2}d\tau = \frac{q'}{q'-1}\ [(1-t)^{q'-1}-(1-u)^{q'-1}],$$

$$t<u<1 .$$

Спрямувавши u до 1, одержимо

$$\psi(t) \leq q(1-t)^{q'-1}, \qquad \left\{\psi\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right\}^{\frac{1}{q'}}\leq q^{\frac{1}{q'}}\left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)^{\frac{1}{q}} .$$

Враховуючи останню нерівність і замінюючи в (5) σ^2 на σ маемо

$$m_q(r,\omega) \leq T(\sigma r,\omega)\left\{1+\left(\frac{2^{q'+1}}{\sigma^{q'/2}-1}\right)^{\frac{1}{q'}}+ \frac{(2q)^{\frac{1}{q'}}}{\ln\sigma}\left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)^{\frac{1}{q}}\right\} .$$

Оскільки $\frac{\sigma-1}{\sigma}\leq \ln\sigma$, $\sqrt{\sigma-1}\leq \sigma^{\frac{q'}{2}}-1$, то

$$m_q(r,u) \le T(\sigma r,u)\left\{1+\left(\frac{2^{q'+1}(\sqrt{\sigma}+1)}{\sigma-1}\right)^{\frac{1}{q'}}+\left(\frac{2q\sigma}{\sigma-1}\right)^{\frac{1}{q'}}\right\} =$$

$$= \frac{A_q(\sigma)}{(\sigma-1)^{1/q'}}\, T(\sigma r,u) .$$

Нехай тепер $1\le q\le 2$. У нерівності (4) покладемо $f=u(rx)$, $p=1$, $s=2$. Тоді $\theta = \frac{2}{q'}$. Застосовуючи нерівність (4) при $q=2$, знаходимо

$$m_q(r,u) \le \left\{2T(r,u)\right\}^{1-\frac{2}{q'}}\left\{\frac{A_2}{(\sigma-1)^{1/2}}\right\}^{\frac{2}{q'}}\left(T(\sigma r)\right)^{\frac{1}{q'}} \le$$

$$\le \frac{2\left(A_2(\sigma)\right)^{\frac{2}{q'}}}{(\sigma-1)^{1/q'}}\, T(\sigma r) .$$

Доведення теорем 3 і 5 такі ж, як і доведення теореми 1.8 з [4, с.43].

Доведення теорем 4 і 6. Якщо (r_n) - послідовність піків Пойя порядку ρ функції $T(r,u)$ [1, с.171], [8], то

$$T(R,u) \le \left(\frac{R}{r_n}\right)^{\rho+\varepsilon} T(r_n,u) , \quad \varepsilon>0 , \quad r_n<R<\infty . \quad (6)$$

Покладемо в (2) і (3) $r=r_n$, $\sigma = \frac{R}{r_n}$ і застосовуемо (6). Після цього залишається перейти до границі при $n\to\infty$, врахувати довільністть ε і взяти мінімум за $\sigma>1$.

Список літератури

1. Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. М.: Мир, 1980.- С.
2. Miles J., Shea D. On the growth of meromorphic functions having at least one deficient value //Duke Math. J.- 1976.- Vol.43, N°1.- P. 171-186.
3. Shimizu T. On the theory of meromorphic functions //Japan J. Math.- 1929.- Vol.6.- P.119-171.
4. Хейман У. Мероморфные функции.- М.: Мир, 1966.
5. Говоров Н.В. О гипотезе Пэйли //Функциональный анализ и его приложения.- 1969.- Т.3, N°2.- С.41-45.
6. Петренко В.П. Рост мероморфных функций конечного нижнего порядка //Изв. АН СССР. Сер. математическая.- 1969.- Т.33.- С.414-454.
7. Dahlberg B. Mean values of subharmonic functions //Arkiv. för Math.- 1972.- Vol.10.- P.293-309.
8. Drasin D. and Shea D.F. Pólya peaks and oscillation of positive functions //Proc. Amer. Math. Soc.- 1972.- Vol.34.- P.403-411.
9. Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства.- М.: Мир, 1980.
10. Бурбаки Н. Меры. Интегрирование мер.- М.: Наука, 1987.
11. Кондратюк А.А. Ряды Фурье и мероморфные функции.- Львов: Вища шк. Изд-во при Львов.ун-те, 1988.- 196 с.
12. Содин М.Л. Рост целых и мероморфных функций конечного порядка.- Автореф.дисс.канд.физ.-мат.наук.- Ереван, 1985.