УДК 515.12

М.М.ЗАРІЧНИЙ

ФУНКТОРИ ЗІ СКІНЧЕННИМИ НОСІЯМИ І n-ШЕЙПИ

З часу означення основних понять теорії шейпів (див.[1]) загальну задачу збереження шейпових властивостей деякими топологічними конструкціями досліджували різні автори [2,3]. Багато з таких конструкцій є функторіальними в категорії компактів. У даній роботі розглядається задача збереження деяких n-шейпових (в сенсі О.Ч.Чигогідзе [4]) та пов'язаних з ними властивостей нормальними функторами зі скінченними носіями (означення та властивості таких функторів див. у [5,6]).Зауважимо, що останній клас функторів містить функтори G-симетричного степеня SP^n_G, гіперсиметричного степеня exp_n, підфунктори P_n функтора ймовірносних мір та ін.

Нижче всі простори та відображення беруться з категорії $MComp$ метризовних компактів. Через n позначається невід'ємне ціле число.

<u>Означення</u> [4]. Два відображення $f,g\colon X \to Y$ називаються n-гомотопними (позначається $f \overset{n}{\simeq} g$), якщо для кожного відображення $h\colon B \to X$, де $\dim B \le n$ відображення $f\circ h$ та $g\circ h$ гомотопні.

Наступне просте твердження є незначною модифікацією леми Чигогідзе [4].

<u>Лема 1.</u> Відображення $f,g\colon X \to Y$ n-гомотопні тоді і лише тоді, коли існує компакт B і таке n-оборотне

відображення h: $B \to X$, що відображення $f \circ h$ і $g \circ h$ гомотопні.

Нагадаємо, що відображення f: $X \to Y$ називається n-оборотним [7], якщо для кожного α: $A \to Y$, де $\dim A \le n$ існує β: $A \to Y$ таке, що $\alpha = f \circ \beta$.

Твердження 1. Нехай F - нормальний функтор зі скінченними носіями. Тоді F зберігає відношення n-гомотопності.

Доведення. Нехай f, g: $X \to Y$ - n-гомотопні відображення. За лемою 1 існує компакт B і n-оборотне відображення h: $B \to X$ таке, що $f \circ h \sim g \circ h$. Але тоді $Ff \circ Fh \sim Fg \circ Fh$ (це легко випливає з результатів [6]), а оскільки F зберігає властивість n-оборотності [7], що з леми 1 одержуємо, що $Ff \overset{n}{\simeq} Fg$.

Наступний факт легко випливає зі спектрального підходу до означення n-шейпа [9], а також твердження 1.

Твердження 2. Якщо нормальний функтор зі скінченними носіями зберігає клас метризовних ANR-компактів, то він зберігає відношення n-шейпової еквівалентності.

Нагадаємо, що простір X називається UV^n-компактом [9], якщо для будь-якого (деякого) вкладення X в будь-який (деякий) ANR-компакт M і довільного околу U множини X в M існує такий окіл V множини X в M, що $V \subseteq U$ і виконується умова: для кожної метризовної пари (A, B), де $\dim A \le n+1$, кожне відображення g: $B \to V$ має продовження $\bar{g}$: $A \to U$. Відображення, кожен шар якого є UV^n-компактом, називається UV^n-відображенням [10]. Простори X і Y називаються

UV^n-еквівалентними (див.[9]), якщо існують UV^n-відображення $f\colon Z \to X$, $g\colon Z \to Y$ для деякого Z.

Теорема 1. Нехай F - нормальний функтор зі скінченними носіями, що зберігає клас метризовних ANR-компактів. Тоді F зберігає клас метризовних UV^n-компактів.

Доведення. О.Ч.Чигогідзе довів, що простір X є UV^n-компактом тоді і лише тоді, коли $n\text{-}Sh(X)=n\text{-}Sh(1)$ і FX - UV^n-компакт.

Твердження 3. Нехай для нормального функтора F виконується принаймні одна з умов:

1) F має скінченні носії і шарово зберігає метризовні ANR-компакти;

2) $\deg F < \infty$ і F зберігає метризовні ANR-компакти. Тоді F зберігає клас UV^n-відображень, а також відношення UV^n-еквівалентності метризовних компактів.

Для доведення нам знадобиться одна конструкція з загальної теорії функтора. Нехай F - нормальний функтор і $a \in FY$. Функтор F/a означимо формулами ($f\colon X \to X'$ - відображення): $(F/a)X=Fpr_2^{-1}(a)$, де $pr_2\colon X \times Y \to Y$ - проекція; $(F/a)f=F(f \times 1_Y)|(F/a)X\colon (F/a)X \to (F/a)X'$. З теореми В.М.Басманова [11] випливає, що функтор F/a зберігає клас метризовних ANR-компактів, якщо таку властивість має F і $\deg F < \infty$.

Переходимо безпосередньо до доведення твердження 2. Нехай $f\colon X \to Y$ - UV^n-відображення і $a \in FY$. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $supp(a)=Y$. Легко бачити, що у цьому випадку відображення f можна розглядати як пошаровий ретракт проектування pr_2: $\Pi \{f^{-1}(y)|y \in Y\} \times \times Y \to Y$. Оскільки властивість бути UV^n-компакт. Але у цьому випадку $Ff^{-1}(a)=(F/a)X'$ і за теоремою 1 одержуємо, що $Ff^{-1}(a)$ - UV^n-компакт.

Аналогічно до твердження 3 доводиться наступний факт, що узагальнює теорему О.М.Дранішникова з [7].

Твердження 4. В умовах твердження 3 функтор F зберігає властивість шарів відображення метризовних компактів бути відповідно LC^n-компактами та $AE(n+1)$-просторами.

Лема 2. Відображення f: $X \to Y$ метризовних ANR-компактів n-гомотопне нулю тоді і лише тоді, коли воно індукує нульовий гомоморфізм гомотопійних груп виміру $\le n$.

Доведення. Необхідність. Нехай α: $S^i \to X$, $i \le n$ - деяке відображення. Якщо $f \simeq 0$, то відображення $f \circ \alpha$ гомотопне відображення в точку.

Достатність. Оскільки $X \in ANR$, то використовуючи перехід до нервів відкритих покрить, розглядаємо наступний випадок. Нехай Z - поліедр, $dim\ Z \le n$ і α: $Z \to X$ - відображення. Досить довести, що відображення $f \circ \alpha$ продовжується до відображення g: $Con(Z) \to Y$. (Тут $Con(Z)$ - конус над Z з вершиною v; вважаємо, що поліедр Z вкладений в $Con(Z)$ як основа). Приймемо $g(v)=f(x)$ для деякої точки $x \in X$.

Нехай $z_1,\dots,z_k$ - вершини поліедра Z, $\sigma_1,\dots,\sigma_k$ - одновимірні симплекси, $\partial\sigma_i=(z_i,v)$. Оскільки $f(X)$ лежить в деякій компоненті лінійної зв'язності простору Y, то можемо продовжити відображення g на симплекси σ_i.

Нехай $Z^{(k)}$- K-вимірний кістяк поліедра Z. Індукцією за $k\geq 1$ означимо продовження відображення g на поліедр $L_k=Z \cup (Con(Z^{(k)})) \subset Con(Z)$. Припустивши, що відображення g вже означене на L_{k-1}, розглянемо k-вимірний симплекс σ з вершиною v. Тоді відображення g вже означене на $\partial\sigma \subset L_{k-1}$ і з умови леми випливає, що відображення g може бути продовжене на σ. Отже, g продовжується на L_k. При $k=n+1$ одержуємо, що g продовжується на $Con(Z)$. Лема доведена.

Наступна теорема тісно пов'язана з результатами [12].

Теорема 2. Кожен нормальний функтор зі скінченними носіями, що зберігає клас метризовних ANR-компактів, зберігає властивість відображень метризовних ANR-компактів індукувати нульовий гомоморфізм груп виміру $\leq n$.

Доведення безпосередньо випливає з леми 2 і твердження 1.

Залишаються відкритими наступні питання.

1. Чи кожен нормальний функтор зі скінченними носіями, що зберігає метризовні ANR-компакти, зберігає також і відношення спадкової n-шейпової еквівалентності ?

2. Чи справедливий аналог теореми 2 для відносних гомотопічних груп ?

3. Чи можна замінити в наведених результатах властивість нормальності функтора на властивість слабкої нормальності ?

Список літератури

1. Borsuk K. Theory of shape.- Warszawa: PWN, 1975.- 379 p.
2. Kodama Y., Spież S., Watanabe T. On the shape of hyperspaces//Fund. Math.- 1978.- Vol.100, N° .- P.59-67.
3. Olędzki J. On symmetric products//Fund. Math.- 1988.- Vol.131, N°3.- P.185-190.
4. Чигогидзе А.Ч. Компакты, лежащие в n-мерном универсальном компакте Менгера и имеющие в нем гомеоморфные дополнения//Математический сборник.- 1987.- Т.133, N°4.- С.481-486.
5. Щепин Е.В. Функторы и несчетные степени компактов//УМН.- 1981.- Т.36, вып.3.- С.3-62.
6. Федорчук В.В. Мягкие отображения, многозначные ретракции и функторы//УМН.- 1986.- Т.41, вып.6.- С.121-159.
7. Драницников А.Н. Абсолютные экстензоры в размерности n и n-мягкие отображения, повышающие размерность//УМН.- 1984.- Т.39, N°5.- С.55-95.
8. Драницников А.Н. Ковариантные функторы и экстензоры в размерности n //УМН.- 1985.- Т.40, вып.6.- С.133-134.
9. Чигогидзе А.Ч. Теория n-шейпов //УМН.- 1989.- Т.44, вып.5.- С.117-140.
10. Lacher R.C. Cell-like mappings and their generalizations//Bull. Amer. Math. Soc.- 1977.- Vol.83.- P.495-552.
11. Басманов В.Н. Ковариантные функторы, ретракты и размерность//ДАН СССР.- 1983.- Т.271, N°5.- С.1033-1036.

. Басманов В.Н. Ковариантные функторы конечных степеней и связность//ДАН СССР.- 1984.- Т.279, №6.- С.1289-1293.