УДК 517.53

М.В.ЗАБОЛОЦЬКИЙ

УЗАГАЛЬНЕННЯ ОДНІЄЇ ТЕОРЕМИ АНДЕРСОНА І КЛУНІ

Будемо користуватися стандартними позначеннями неванлінніївської теорії розподілу значень (див., наприклад [1]). Нехай f - трансцендентна мероморфна функція, число θ, $0\le\theta<2\pi$, таке, що рівняння $f(z)=a$ для довільного $a\in\overline{\mathbb{C}}$, за винятком щонайбільше двох значень, має нескінченну множину розв'язків у куті $\{z: \theta-\varepsilon<\arg z<\theta+\varepsilon\}$, де $\varepsilon>0$ довільне число. Такий промінь $\arg z=\theta$ називають прямою Жюліа функції f, а клас S функцій f, що не володіють жодною прямою Жюліа, називають винятковим у розумінні Жюліа. Позначимо $\rho(f(z))=|f'(z)|(1+|f(z)|^2)^{-1}$ - сферичну похідну мероморфної функції f. Справедливе наступне твердження.

Теорема А [2]. $f\in S$ тоді і тільки тоді, коли $\rho(f(z))|z|=o(1)$, $z\to\infty$.

Для цілих трансцендентних функцій виконується [3] $\rho(f(z))|z|(\ln|z|)^{-1}\to\infty$, $z\to\infty$ і, таким чином, цілі функції не належать до класу S. Більше того, Андерсон і Клуні [4] довели, що у функцій класу S відсутні неванлінніївські виняткові значення. Виникає проблема: описати клас мероморфних функцій, сферична похідна яких зростає швидше, ніж $1/|z|$, $|z|\to\infty$, і в яких відсутні неванлінніївські виняткові значення.

Теорема 1. Нехай Φ опукла стосовно логарифму на $[1,\infty)$ функція, $\Phi(2r)=O(\Phi'(|z|))$, $z\to\infty$, то $(\forall a\in\overline{\mathbb{C}})$ $[\delta(a,f)=0]$

або $T(r,f)=O(\Phi(|r|))$, $r\to\infty$.

Враховуючи, що для цілих функцій $\delta(\infty)=1$, одержуемо

Наслідок. Нехай f - ціла функція, $\rho(f(z))=O(\Phi'(|z|))$, $z\to\infty$. Тоді $T(r,f)=O(\Phi(r))$, $r\to\infty$, де Φ - функція, що задовольняє умовам теореми 1.

Зауваження 1. Легко бачити, що теорема 1 є узагальненням вище сформульованого результату Андерсона і Клуні. Дійсно, для цього потрібно покласти $\Phi(r)=\ln r$ і врахувати, що для трансцендентних мероморфних функцій $T(r,f)/\ln r\to\infty$, $r\to\infty$.

Зауваження 2. У випадку $\Phi(r)=r^{\rho}$, $\rho>0$, з наслідку одержуемо один з результатів [3].

Зауваження 3. У [3] для довільного $\sigma>-1$ побудований приклад мероморфної функції F, для якої $\rho(F(z))\sim|z|^{\sigma}$, $T(|z|,F)\sim|z|^{2\sigma+2}$, $z\to\infty$. Це разом з наслідком показує, що в теоремі1 дійсно можливими є обидва випадки тверджень.

Зауваження 4. У роботах [5] і [6] виділяються підкласи W_p^0 мероморфних трансцендентних функцій f класу $W_p=\{f:\ \rho(f(z))=O(|z|^{p-2}),\ z\to\infty\}$, $p>1$, функції яких не мають валіронівських (а значить, і неванліннівських) виняткових значень. Ці підкласи W_p^0 характеризуються не ростом $T(r,f)$, а деяким іншим способом. Правда, для функцій $f\in W_p^0$ виконується $Ar^{2p-2}\le T(r,F)\le Br^{2p-2}$, де $0<A\le B<+\infty$. Зокрема, з теореми 1 у випадку $\Phi(r)=r^{p-1}$, $p>1$, одержуемо підклас W_p^1 функцій класу W_p, функції якого задовольняють умову $T(r,f)\ne O(r^{p-1})$, і не мають неванліннівських виняткових значень. Очевидно, що W_p^0 є власною підмножиною W_p^1.

Виникає запитання: Чи мають функції класу W_p^1 валіронівські виняткові значення ? Чи можна в теоремі 1 твердження про відсутність неванліннівських виняткових значень замінити на сильніше – про відсутність валіронівських виняткових значень ?

Гіпотеза. Існує мероморфна трансцендентна функція g, така, що $\rho(g(z))=O(\Phi'(|z|))$, $T(r,g)=O(\Phi(r))$, $z=re^{i\varphi}\to\infty$, $\Delta(\infty,g)>0$. Функція Φ задовольняє умови теореми 1 $\Phi(r)/\ln r\to\infty$, $r\to\infty$.

Зауваження 5. У [7] показано, що функції класу S не мають валіронівських виняткових значень (це відповідає для теореми 1 випадку $\Phi(r)=\ln r$).

Складність побудови такого прикладу полягає в тому, що множення мероморфної трансцендентної функції на раціональну функцію $1/z$, може дуже змінити ріст сферичної похідної. Наприклад, функція $\Psi(z)=\prod_{n=1}^{\infty}(z-2^n)/(z+2^n)$ є винятковою в розумінні Жюліа (див. [8, с.144]), і, значить, за теоремою А виконується $\rho(\Psi(z))|z|=O(1)$, $z\to\infty$. Для функції $\Psi_1(z)=\Psi(z)/z$ маємо $|\Psi_1(iy)|=1/|y|\to 0$, $y\to+\infty$, тобто, нуль є асимптотичним значенням функції $\Psi_1(z)$. Враховуючи, що функції класу S не володіють асимптотичними значеннями [9], одержуємо, що $\Psi_1\overline{\in} S$, а отже, $\rho(\Psi_1(z))|z|\to\infty$, $z\to\infty$.

Доведення теореми 1 спирається на наступну лему, доведення якої можна знайти в [10].

Лема. Нехай f - мероморфна трансцендентна функція і існують числа r_0 і r_1, $0<r_0<r_1<\infty$, такі, що $\min(|f(z)|: |z|=r_0) < 1$ і $m(r_1,f) > 16$. Тоді існує точка ξ з кільця

$\min(r_0, r_1 e^{-\pi}) < |z| < r_1$, така, що

$$|\xi|\ \rho(f(\xi)) \geq Km(r_1, f)/(\pi + \ln(r_1/r_0)) ,$$

де K - абсолютна постійна.

Доведення теореми 1. Припустимо, що теорема не правильна, тобто, що існує мероморфна функція f, для якої $T(r,f)=O(\Phi(r))$, $r \to \infty$, й існує число $a \in \bar{\mathbb{C}}$ таке, що $\delta(a,f)=\delta > 0$. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $a=\infty$. Дійсно, інакше розглянули б функцію $f_1(z)=(f(z)-a)^{-1}$, для якої виконуеться $T(r,f)=T(r,f_1)+O(1)$, $\delta(\infty,f_1)=\delta(a,f)$, $|\rho(f_1(z))-\rho(f(z))| \leq A$, $A>0$.

Візьмемо число b, $|b|<1$, таке, що $\Delta(b,f)=0$. Нехай b_k це b-точки функції f, розташовані в порядку неспадання модулів. Для достатньо великих K покладемо $r_0=|b_k|$, $r_1=|b_k|e^{\pi}=r_k$, і застосовуемо лему до функції f . Маемо $\min(|f(z)|: |z|=|b_k|) \leq |b|<1$, $m(r_k,f) \geq 0{,}5\ \delta\ T(r_k,f) \to \infty$, $k \to \infty$, а отже, існує точка z_k, $|b_k|<|z_k|<r_k$, така що

$$|z_k|\ \rho(f(z_k)) \geq K\ m(r_k,f)/(2\pi) \geq K_1 T(r_k,f) ,$$

де через $K_i>0$ будемо позначати абсолютні постійні.

Враховуючи, що $\rho(f(z))=O(\Phi'(|z|))$, $z \to \infty$, маемо

$$T(r_k,f) \leq K_2 |z_k|\ \Phi'(|z|) \leq K_2 r_k \Phi'(r_k).$$

Далі

$$n(|b_k|,b,f)\ \pi \leq \int_{|b_k|}^{r_k} \frac{n(t,b,f)}{t}\,dt \leq N(r_k,b,f) \leq T(r_k,f) \leq$$

$$\leq K_2 r_k \Phi'(r_k) ,$$

і для t , $|b_k| \leq t < |b_{k+1}|$, одержуемо $n(t,b,f)=n(|b_k|,b,f) \leq$ $\leq K_3 r_k \Phi'(r_k) \leq K_4 t \Phi'(te^{\pi})$.

Звідси

$$N(r,b,f)\le K_4 \int_0^r \Phi'(te^{\pi})dt=K_5 \int_0^{re^{\pi}} \Phi'(t)dt=K_5\Phi(re^{\pi})\le K_6\Phi(r) .$$

Враховуючи, що $\Delta(b,f)=0$, тобто, $m(r,b,f)=o(T(r,f))$, $r\to\infty$, одержуємо

$$T(r,f)=N(r,b,f)+m(r,b,f)+O(1)=O(\Phi(r)),\ r\to\infty ,$$

що суперечить припущенню. Теорема 1 доведена.

Список літератури

1. Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций.- М.: Наука, 1970.- 592 с.
2. Marty F. Recherches sur la repartition des valeurs d'une fonction meromorphe//Ann.Fac.Sci.Univ.Toulouse.- 1931.- Vol.3, N°23.- P.181-261.
3. Clunie J., Hayman W. The spherical Derivative of integral and meromorphic functions//Comment.Math.Helv.- 1966.-Vol.40, N°2.-P.117-148.
4. Anderson J., Clunie J. Slowly growing meromorphic functions//Comment.Math.Helv.- 1966.- Vol.40,N°4.- P.267-280.
5. Гаврилов В.И. О некоторых классах мероморфных функций, характеризуемых сферической производной //Изв. АН СССР. Сер.математическая.- 1968.- Т.32, N°4.- С.735-742.
6. Махмутов Ш.А. Распределение значений мероморфных функций класса W_p//Докл. АН СССР - 1983.- Т.273, N°5.- С.1063-1066.
7. Zinno T., Toda N. On Julia's exceptional functions//Proc.Jap.Acad.-1966.- Vol.42, N°10.- P.1120-1121.

8. Монтель П. Нормальные семейства аналитических функций.- М.;Л.: ОНТИ, 1936.- 240 с.

9. Lehto O., Virtanen K. On the behaviour of meromorphic functions in the neighbourhood of an isolated singularity//Ann.Acad.Sci.Fenn.Ser.A1.- 1957.- Vol.240.- P.1-9.

10. Toppila S. On the spherical derivative of a meromorphic function with a deficient value//Lect.Notes Math.- 1983.- Vol.1013.- P.373-393.