УДК 517.53

А.А.ГОЛЬДБЕРГ

ПРО ОДНУ ОЗНАКУ НАЛЕЖНОСТІ ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО ТИПУ ДО КЛАСУ L^p

Нехай E - клас дійсних цілих функцій експоненціального типу, всі нулі яких дійсні і послідовність цих нулів не обмежена ні зліва, ні справа. Метою статті є доведення однієї необхідної ознаки того, що $f \in E$ належить до класу $L^p=L^p(-\infty,\infty)$, $p\geq 1$, тобто

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx < \infty , \qquad (1)$$

а головне - доведення того, що ця ознака не є достатньою. Вимога двосторонньої необмеженості послідовності нулів в означенні класу E є природньою, бо вона обов'язково виконується для функцій експоненціального типу з L^p, що випливає з відомої теореми Ліндельофа [1, с.85] та властивості $f(x) \to 0$ при $|x|\to \infty$ [2, с.98].

Нулі функції $f \in E$ позначимо так: $\ldots<x_k<x_{k+1}<\ldots$ (нумеруючи нулі, не враховуємо їхні порядки). За теоремою Лагерра [3, с.292] нулі f' також усі дійсні і відокремлені один від одного нулями f. Позначимо через ξ_k нуль f', що лежить між нулями x_k і x_{k+1} функції f. Нулі f', що лежать в кратних нулях f, до послідовності (ξ_k) не включаємо. Нехай $|f(\xi_k)|=b_k$.

<u>Теорема.</u> Нехай $f \in E$. Для того, щоб $f \in L^p$, $p\geq 1$, необхідно, але не досить, щоб

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k^p < \infty . \qquad (2)$$

Щиро дякую М.Л.Содіну, який повідомив мені задачу про зв'язок між належністю f до $E \cap L^p$ і збіжністю ряду (2). Доведемо спочатку необхідність. Нехай $f \in E \cap L^p$. Скажемо, що $j \in A$, якщо $x_{j+1}-x_j \le 1$, і $j \in B$, якщо $x_{j+1}-x_j > 1$. Нехай $j \in A$. Тоді за нерівністю Опяла-Хуа Логена-Келверта [4],[5, с.157] справджується

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} |f(x)|^{p-1}|f'(x)|dx \le \frac{1}{p}\left(\frac{x_{j+1}-x_j}{2}\right)^p \int_{x_j}^{x_{j+1}} |f'(x)|^p dx \le$$

$$\le \frac{1}{p}\int_{x_i}^{x_{j+1}} |f'(x)|^p dx \qquad (3)$$

З лівого боку (3) стоїть розділена на p повна варіація функції $|f(x)|$ на $[x_j,x_{j+1}]$, яка дорівнює $2b_j^p$. Тому

$$2\sum_{j\in A} b_j^p \le \sum_{j\in A}\int_{x_j}^{x_{j+1}} |f'(x)|^p dx \le \int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|dx < \infty, (4)$$

бо, як відомо [2, с.99], якщо $f \in L^p$, то і $f' \in L^p$. Якщо $B=\emptyset$, то доведення необхідності закінчено. Якщо $B\neq\emptyset$, то перенумеруємо послідовність (можливо, скінченну) $(x_j)_{j\in B} = (x'_k)$, так, щоб k пробігало $\mathbb{Z} \cap (\mu,\nu)$, $-\infty \le \mu < \nu \le \infty$, $x'_k < x'_{k+1}$. Якщо $x_j = x'_k$, то ξ_j позначимо через ξ'_k . Тоді $\xi'_{2(k+1)}-\xi'_{2k}>1$, $\xi'_{2k+1}-\xi'_{2k-1}>1$. Отже, існує стала K, що залежить лише від p і величини типу f, така, що

$$\sum_k |f(\xi'_{2k})|^p \le K\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx < \infty ,$$

$$\sum_k |f(\xi'_{2k+1})|^p \le K\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx < \infty$$

[2, с.96-97]. Звідси випливає, що $\sum_{j\in B} b_j^p < \infty$. Разом з (4) це доводить (2).

Тепер доведемо, що наведена в теоремі умова не є достатньою. Для цього побудуємо приклад функції $f \in E$, для якої виконується (2), а інтеграл в (1) розбіжний. Для скорочення розглядатимемо тільки випадок $p=2$, хоч тривіальна модифікація методу дає змогу побудувати подібні приклади для всіх $p>0$.

Позначимо $(n\geq 2)$

$$L_n(z)=\frac{z^n(z-2n+1)^n}{z(z-1)\dots(z-2n+1)}=\frac{(1-(2n-1)/z)^n}{(1-1/z)\dots(1-(2n-1)/z)}.$$

Використовуючи нерівність $|\ln(1+z)|\leq 2|z|$ при $|z|\leq 1/2$, одержуємо, що при $|z|\geq 4n$ справджується $|\ln L_n(z)|\leq 8n^2/|z|$. Нехай $0\leq j\leq 2n-1$. При $x<0$ справедливе $(|x|+j)(|x|+2n-1)\geq|x|(|x|+2n-1)$, а при $x>2n-1$ виконується $(x-j)(x-2n+1+j)\geq x(x-2n+1)$. Тому $|L_n(x)|\leq 1$ при $x\in(-\infty,0)\cup(2n-1,\infty)$. На $(0,2n-1)$ ціла функція $M_n(x)=L_n(x)\sin\pi x$ не перетворюється в нуль і $\operatorname{sign} M_n(x)=(-1)^{n+1}$. Зі згаданої вище теореми Лагерра випливає, що на інтервалі $(0,2n-1)$ лежить один нуль $M_n'(x)$. Оскільки $M_n(x-n+1/2)$ є парною функцією, то цей нуль знаходиться в точці $x=n-1/2$. Нехай $l_n\in\mathbb{Z}$, $|l_n|<n-1/2$. Тоді $|M_n(n-l_n-1/2)|=|L_n(n-l_n-1/2)|=$

$$=\frac{(2^2(n^2-l_n^2)(1-1/(2(n-l_n)))(1-1/(2(n+l_n))))^n}{(2(n-l_n)-1)!!(2(n+l_n)-1)!!}.$$

Як що $l_n=O(n)$, $n\to\infty$, то, застосовуючи формулу Стірлінга, одержуємо

$$|M_n(n-l_n-1/2)|=(1/2+o(1))e^{2n-1}, \quad n\to\infty . \qquad (5)$$

Покладемо $m_n=[e^{2n-1}n^{0,6}/2]$, $D_n=(z:\ |z-m_n|\le n^4)$, $L(z)=\prod_{j=2}^{\infty}L_j(z-m_j)$. Абсолютна і рівномірна збіжність на компактах з $\mathbb{C}$ цього нескінченного добутку випливатиме з наступних оцінок. Якщо $z\notin D=\bigcup_{j=2}^{\infty}D_j$, то $|\ln L(z)|\le$

$$\le\sum_{j=2}^{\infty}|\ln L_j(z-m_j)|\le 8\sum_{j=2}^{\infty}j^2|z-m_j|^{-1}\le 8\sum_{j=2}^{\infty}j^{-2}< 6 ,$$

звідки

$$e^{-6}<|L(z)|< e^{6}. \qquad (6)$$

При $z\in D_n$ і достатньо великих n

$$|\ln\prod_{\substack{j=2\\ j\ne n}}^{\infty}L_j(z-m_j)|\le 8\sum_{j=2}^{n-1}\frac{j^2}{m_n-n^4-m_j}+8\sum_{j=n+1}j^{-2}=$$

$$=O(n^3/m_n)+O(1)=o(1), \quad n\to\infty .$$

Звідси випливає, що

$$\prod_{\substack{j=2\\ j\ne n}}^{\infty}|L_j(z-m_j)|=1+o(1), \quad z\in D_n, \quad n\to\infty . \qquad (7)$$

Відрізки $I_n=[m_n, m_n+2n-1]$ при $n\ge2$ попарно не перетинаються. Тому функція $f(z)=L(z)(\sin\pi z)/z$ є цілою. Ззовні множини D, яка має нульову лінійну щільність, з огляду на (6), виконується $|f(z)|\le e^{6}|\sin\pi z|/|z|$. Очевидно, що f має експоненціальний тип π і $f\in E$. Знову посилаючись на теорему Лагерра, можемо стверджувати, що $|f(x)|$ має на I_r єдину точку максимуму в $x=\beta_n$. При $x\in I_n$ виконується

$$|f(x)|=|\prod_{\substack{j=2\\ j\ne n}}L_j(x-m_j)|\,|L_n(x-m_n)\sin\pi x|/|x|=$$

$$=\frac{1+o(1)}{m_n}|L_n(x-m_n)\sin\pi x|, \quad n\to\infty, \qquad (8)$$

внаслідок (7). Враховуючи (5) з $l_n=0$, одержуємо

$$\max(|f(x)|:\ x\in I_n)=\frac{1+o(1)}{m_n}\max(|M_n(x)|:\ 0\le x\le 2n-1)=$$

$$=\frac{1/2+o(1)}{m_n}e^{2n-1}=(1+o(1))n^{-0,6},\qquad n\to\infty .$$

Тому

$$\sum_{n=2}^{\infty}|f(\beta_n)|^2=\sum_{n=2}^{\infty}(1+o(1))n^{-1,2}<\infty . \qquad (9)$$

При $x\notin I=\bigcup_{n=2}^{\infty}I_n$ маємо $|L(x)|\le 1$, $|f(x)|\le 1/|x|$ і

$$\sum_{\xi_j\notin I}|f(\xi_j)|^2\le\sum_{\xi_j\notin I}|\xi_j|^{-2}<\infty , \qquad (10)$$

бо $|\xi_j|\sim|j|$, $|j|\to\infty$. З (9) і (10) випливає (2).

Припустимо, що $f\in L^2$. За теоремою Планшереля [2, с.106]

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx=\int_{-\infty}^{\infty}|f(x-1/2)|^2dx=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|f(k-1/2)|^2\ge$$

$$\ge\sum_{n=2}^{\infty}\ \sum_{k=n-[\sqrt{n}]}^{n+[\sqrt{n}]}|f(m_n+K-1/2)|^2=$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}(1+O(1))\sum_{l=-[\sqrt{n}]}^{[\sqrt{n}]}(m_n^{-1}|M_n(n-l-1/2)|)^2=$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}(1+o(1))2\sqrt{n}(e^{2n-1}2^{-1}m_n^{-1})^2=\sum_{n=2}^{\infty}(2+o(1))n^{-0,7}=\infty$$

що неможливо. Тут через $o(1)$ позначається величина, що прямує до нуля при $n\to\infty$, і були використані співвідношення (8) та (5) з $l_n=0,\pm[\sqrt{n}]$.

Зауваження 1. Якщо $x_{k+1}-x_k=O(1)$, $|k|\to\infty$, то очевидно, що умова (2) у теоремі є достатньою.

Зауваження 2. Ми не змогли з'ясувати, чи в теоремі можна замінити $\rho\ge 1$ на $\rho>0$. Умову $\rho\ge 1$ ми використовували тільки при виведенні (3).

Список літератури

1. Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций.- М.: Наука, 1970.- 592 с.

2. Young R.M. An introduction to nonharmonic Fourier series.- N.Y.: Academic Press, 1980.- 246 p.

3. Титчмарш Е. Теория функций.- М.;Л.: Гостехиздат.- 1951.- 506 с.

4. Calvert J. Some generalizations of Opial's inequality //Proc. Amer. Math. Soc.- 1967.- Vol.18.-P.72-75.

5. Mitrinovic D.S. Analytic inequalities.- B.: Springer, 1970.- 400 p.