УДК 512.547.25

А.Ф.БАРАННИК, П.М.ГУДИВОК

КІЛЬЦЕ ПРОЕКТИВНИХ ЦІЛОЧИСЛОВИХ p-АДИЧНИХ ЗОБРАЖЕНЬ СКІНЧЕННОЇ ГРУПИ

Нехай R - повне дискретно нормоване кільце, R^*- мультиплікативна група кільця R, V - підгрупа групи R^*, $GL(n,R)$ - повна лінійна група степеня n над кільцем R і G - скінченна група порядку $|G|$. (R,V) - зображенням групи G називается таке відображення Γ групи G в групу $GL(n,R)$, для якого справедлива рівність

$$\Gamma(a)\Gamma(b)=\lambda_{a,b}\Gamma(ab) \qquad (\lambda_{a,b}\in V;\ a,b \in G). \quad (1)$$

Два (r,v)-зображення Γ_1 і Γ_2 групи G називаються R-еквівалентними, якщо існує така матриця $C \in GL(n,R)$ і такі елементи $\alpha_g \in V$ $(g \in G)$, що

$$C^{-1}\Gamma_1(g)C = \alpha_g\ \Gamma_2(g). \qquad (2)$$

Якщо $V=\{1\}$, то, очевидно, (R,V)-зображення групи G буде звичайним (лінійним) R-зображенням цієї групи. Із (1) одержуемо, що

$$\lambda_{a,bc}\ \lambda_{b,c}= \lambda_{ab,c}\ \lambda_{a,b} \qquad (a,b,c \in G). \qquad (3)$$

Система елементів $\{\lambda_{a,b}|\lambda_{a,b} \in V;\ a,b \in G\}$, що задовольняють умову (3), називается системою V-факторів групи G. Системи V-факторів $\{\lambda_{a,b}\}$ і $\{\lambda'_{a,b}\}$ називаються еквівалентними, якщо існує така множина елементів $\{\alpha_g|$ $\alpha_g \in V,\ g \in G\}$, що

$$\lambda'_{a,b}= \alpha_a\ \alpha_b\ \alpha^{-1}_{a,b}\ \lambda_{a,b} \qquad (a,b \in G). \qquad (4)$$

Клас еквівалентних систем V-факторів групи G, який містить систему $(\lambda_{a,b})$, будемо позначати через $[\lambda]$. Якщо добуток двох класів $[\lambda]$ і $[\mu]$ визначити за формулою $[\lambda][\mu]=[\lambda\mu]$, то множина всіх класів еквівалентних систем V-факторів групи G буде абелевою групою. Ця група називається V-мультиплікатором групи G. (R,V)-зображення групи G, що задовольняє умову (1), називається проективним R-зображенням групи G із системою V-факторів $\lambda=(\lambda_{a,b})$. Очевидно, якщо проективні R-зображення Γ_1 і Γ_2 групи G із системами V-факторів λ і μ еквівалентні, то системи V-факторів λ і μ також еквівалентні. Легко бачити, що довільна система V-факторів $\lambda=(\lambda_{a,b})$ групи G еквівалентна нормованій системі V-факторів $\lambda'=(\lambda'_{a,b})$, тобто $\lambda'_{e,a}=\lambda'_{a,e}=1$ ($a \in G$, e - одиниця групи G). Надалі будемо вважати, що системи V-факторів групи G нормовані.

Позначимо через $G(\lambda)=(G,R,\lambda)$ схрещене групове кільце групи G і кільця R при системі V-факторів $\lambda=(\lambda_{a,b})$. Очевидно, існує тісний зв'язок між матричними R-зображеннями кільця $G(\lambda)$ і проективними R-зображеннями групи G із системою V-факторів λ (див.[1]). Означення незвідного і нерозкладного (R,V)-зображення групи G подані аналогічно до означень відповідних понять для лінійних R-зображень групи G.

Надалі будемо вважати, що V - група без кручення. Позначимо через W множину всіх нееквівалентних нерозкладних (R,V)-зображень групи G, причому вважатимемо, що всі нерозкладні (R,V)-зображення з еквівалентними системами V-факторів входять в W з однією і тією ж системою факторів.

Нехай $\alpha(G,R,V)$ - $\mathbb{Z}$-модуль з базисом $\{\Gamma_i\} = W$ ($\mathbb{Z}$ - кільце цілих чисел). Введемо в $\alpha(G,R,V)$ операцію множення. Нехай $\Gamma_i, \Gamma_j \in W$. Очевидно, відображення

$$\Gamma = \Gamma_i \otimes \Gamma_j: g \longrightarrow \Gamma_i(g) \otimes \Gamma_j(g) \quad (g \in G)$$

буде (R,V)-зображенням групи G ($\Gamma_i(g) \otimes \Gamma_j(g)$ - тензорний добуток матриць $\Gamma_i(g)$ і $\Gamma_j(g)$). Зображення $\Gamma=\Gamma_i \otimes \Gamma_j$ R-еквівалентне (R,V)-зображенню Γ' такого вигляду:

$$\Gamma': g \longrightarrow \Gamma'(g)=diag\,[\Gamma_{r_1}(g),\ldots,\Gamma_{r_m}(g)] \quad (g \in G),$$

де $\Gamma_{r_t} \in W$ ($t=1,\ldots,m$). Добуток елементів Γ_i і Γ_j задамо так:

$$\Gamma_i\Gamma_j = \Gamma_{r_1}+\ldots+\Gamma_{r_m}. \qquad (5)$$

Враховуючи, що для (G,R,λ)-модулів із скінченними R-базисами справедлива теорема Крулля-Шмідта [2], легко бачити, що означення (5) коректне. Із (5) випливає, що $\alpha(G,R,V)$ є комутативним кільцем із одиницею. Алгебру $A_{\mathbb{Q}}(G,R,V) = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \alpha(G,R,V)$ будемо називати $\mathbb{Q}$-алгеброю (R,V)-зображень групи G ($\mathbb{Q}$ - поле раціональних чисел). Алгебра $A_{\mathbb{Q}}(G,R,1)=A_{\mathbb{Q}}(RG)$ ($V=\{1\}$) вивчалась в [3-9]. У випадку, коли R - кільце характеристики нуль, в [8,9] повністю розв'язана задача про напівпростоту алгебри $A_{\mathbb{Q}}(RG)$. Під напівпростим кільцем ми розуміємо таке кільце, у якому радикал Джекобсона дорівнює нулеві.

У данній статті вивчається будова алгебри $A_{\mathbb{Q}}(G,\mathbb{Z}_p,V)$, де $R=\mathbb{Z}_p$ - кільце цілих p-адичних чисел.

<u>Лема 1</u> (див.[8-9]). Нехай R - повне дискретно нормоване кільце характеристики нуль з полем лишків

характеристики $p>0$ і H - скінченна p-група порядку $|H|>1$. Алгебра $A_{\mathbb{Q}}(RH)$ напівпроста тоді і тільки тоді, коли виконується одна з таких умов: 1) $|H|=2$; 2) $|H|=p$ і p - простий елемент кільця R.

Наслідок 1. Нехай H - скінченна p-група порядку $|G|$. Алгебра $A_{\mathbb{Q}}(H,R,V)$ не дорівнює нулеві.

Лема 2 (див. [8-9]). Нехай G - скінченна група порядку $|G|$. Алгебра $A_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Z}_pG)$ напівпроста тоді і тільки тоді, коли силовська p-підгрупа H групи G має порядок $|H|\le p$.

Як відомо (див. [10]), $\mathbb{Z}_p^*= T_p\times V_p$, де при $p\neq 2$ T_p - циклічна група порядку $p-1$ і $V_p=(\alpha\in\mathbb{Z}_p \mid \alpha\equiv 1(mod\ p\mathbb{Z}_p))$, а при $p=2$ T_2 - група порядку 2 і $V_2=(\alpha\in\mathbb{Z}_p \mid \alpha\equiv 1(mod\ 4\mathbb{Z}_2))$. Очевидно, V_p - група без кручення. Надалі будемо вважати, що $V=V_p$.

Лема 3. Нехай G - скінченна група порядку $n\ge 1$. Якщо $(n,P)=1$, то кожне $(\mathbb{Z}_p,V_p)$-зображення групи G $\mathbb{Z}_p$-еквівалентне $\mathbb{Z}_p$-зображенню групи G.

Доведення. Очевидно, досить довести, що всяка система V_p-факторів $(\lambda_{a,b})$ $(a,b\in G)$ групи G еквівалентна одиничній системі факторів. Із [11] випливає, що

$$\lambda_{a,b}=\begin{cases}(1+p)^{r_{a,b}} & \text{при } p\neq 2;\\ 5^{r_{a,b}} & \text{при } p=2\end{cases} \qquad (6)$$

$(r_{a,b}\in\mathbb{Z}_p;\quad a,b\in G)$.

Покладемо

$$\gamma(a)=\prod_{b\in G}\lambda_{a,b}.$$

Тоді з (3) одержуемо, що

$$\lambda^n_{a,b} = \frac{\gamma(a)\gamma(b)}{\gamma(ab)}. \qquad (7)$$

З [10] для довільного $a \in G$ існує таке $\beta(a) \in V_p$, що $\beta(a)^n = \gamma(a)$. Звідси і з (7) дістаемо, що

$$\left(\lambda_{a,b}\, \beta(ab)\, \beta(a)^{-1} \beta(b)^{-1}\right)^n = 1.$$

Отже,

$$\lambda_{a,b} = \beta(a)\, \beta(b)\, \beta(ab)^{-1}.$$

Це означає (див. [4]), що система факторів $(\lambda_{a,b})$ еквівалентна одиничній системі факторів $(\lambda'_{a,b})$ $(\lambda'_{a,b}=1;$ $a,b \in G)$. Лема доведена.

Наслідок 2. Нехай B - скінчення p'-група. Алгебри $A_{\mathbb{Q}}(B,\mathbb{Z}_p,V_p)$ і $A_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Z}_p B)$ ізоморфні.

Лема 4. Нехай $H=\langle a\rangle$ вичерпуються такими зображеннями:

$$\Delta_0\colon a \to 1; \quad \Delta_1\colon a \to \tilde{\varepsilon}; \quad \Gamma_r\colon a \to \tilde{\rho}_r \ (r=1,\dots,p-1)$$

$$\Gamma_0\colon a \to \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon} & \langle 1\rangle \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \langle 1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (8)$$

де $\varepsilon^p=1$ $(\varepsilon\neq 1)$, ρ_r - корінь полінома $x^p-(1+p)^r$ і $\tilde{\alpha}$ - матриця, що відповідае оператору множення на α в $\mathbb{Z}_p$-базисі $1,\alpha,\dots,\alpha^{n-1}$ кільця $\mathbb{Z}_p[\alpha]$ (α - корінь деякого незвідного над $\mathbb{Z}_p$ полінома степеня n із одиничними коефіцієнтом при старшому члені). Позначимо через $\overline{\Gamma}$ $\overline{\mathbb{Z}}_p$-зображення групи $H=\langle a\rangle$ $(\overline{\mathbb{Z}}_p=\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p)$, одержане з $(\mathbb{Z}_p,V_p)$-зображення Γ: $a \to \Gamma(a)$ зведенням елементів матриці $\Gamma(a)$ за модулем $p\mathbb{Z}_p$. Легко показати, що з точністю до $\overline{\mathbb{Z}}_p$-еквівалентності виконуються такі формули:

$$\overline{\Delta}_1\colon a \to I_{p-1}; \quad \overline{\Gamma}_r\colon a \to I_p \quad (r=0,1,\dots,p-1),$$

де I_j- жорданова $j\times j$-клітка з одиницями на головній діагоналі. Із [8] і [9] випливає, що

$$\bar{\Delta}_1 \otimes \bar{\Delta}_1 = \bar{\Delta}_0 + (p-2)\bar{\Gamma}_0,\ \bar{\Delta}_1 \otimes \bar{\Gamma}_0,\ \bar{\Delta}_1 \otimes \bar{\Gamma}_0 = (p-1)\bar{\Gamma}_0,\ \bar{\Gamma}_0 \otimes \bar{\Gamma}_0 = p\bar{\Gamma}_0.$$

Звідси неважко одержати, що

$$\Delta_1 \otimes \Delta_1 = \Delta_0 + (p-2)\Gamma_0\ ,\ \Delta_1 \otimes \Gamma_r = (p-1)\Gamma_r\quad (r=0,1,\dots,p-1),$$
$$\Gamma_i \otimes \Gamma_j = p\Gamma_{i+j}\ (i+j \le p-1),\quad \Gamma_r \otimes \Gamma_s = p\Gamma_{r+s-p}\ (r+s \ge p). \tag{9}$$

Покажемо, що кільце $a(H,\mathbb{Z}_p,V_p)$ не містить ненульові нільпотентні елементи. Нехай $y^2=0$, де

$$y = n_0\Delta_0 + n_1\Delta_1 + m_0\Gamma_0 + m_1\Gamma_1 + \dots + m_{p-1}\Gamma_{p-1}$$
$$(n_i \in \mathbb{Z};\ i=0,1;\ m_j \in \mathbb{Z};\ j=0,1,\dots,p-1).$$

Тоді з (9) дістаємо, що $n_0=n_1=0$ і $m_j \equiv 0 (mod\ 2)$. А це означає, що $y=0$. Таким чином, при $p \neq 2$ алгебра $A_{\mathbb{Q}}(H,\mathbb{Z}_p,V_p)$ є напівпростою.

Нехай далі $p=2$. Всі нееквівалентні нерозкладні $(\mathbb{Z}_2,V_2)$-зображення групи $H=\langle a \rangle$ $(a^2=1)$ мають такий вигляд (див. [1]):

$$\Delta:\ a \to 1;\quad \Delta_0:\ a \to -1;\quad \Delta_1:\ a \to \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$
$$\Delta_2:\ a \to \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\quad \Delta_3:\ a \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Легко бачити, що

$$\Delta_0 \otimes \Delta_i = \Delta_i\ (i=1,2,3);\quad \Delta_1 \otimes \Delta_j = 2\Delta_2\ \ (j=2,3);$$
$$\Delta_2 \otimes \Delta_j = 2\Delta_1\ (j=2,3);\quad \Delta_3 \otimes \Delta_3 = 2(\Delta + \Delta_0). \tag{11}$$

На основі цих формул неважко показати, що алгебра $A_{\mathbb{Q}}(H,\mathbb{Z}_2,V_2)$ є напівпростою. Лема доведена.

Теорема 1. Нехай G - скінченна група з нормальною силовською p-підгрупою H. Алгебра $A_{\mathbb{Q}}(G,\mathbb{Z}_p,V_p) = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} a(G,\mathbb{Z}_p,V_p)$

е напівпростою тоді і тільки тоді, коли H - група порядку $|H|\le p$.

<u>Доведення</u>. Із лем 1-4 випливає, що теорему досить довести у випадку, коли $H=\langle a\rangle$ - циклічна група порядку p. Нехай M - V_p-мультиплікатор групи G, $G(\lambda)=(G,\mathbb{Z}_p,\lambda)$ - схрещене групове кільце групи G і кільця $\mathbb{Z}_p$ при системі факторів $\lambda=(\lambda_{a,b})$ $(\lambda_{a,b}\in V_p;\ a,b\in G)$ і $H(\lambda)=res_H G(\lambda)=(H,\mathbb{Z}_p,\lambda)$. Припустимо, що $H(\lambda)\cong\mathbb{Z}_pH$ для довільного $[\lambda]\in M$. Тоді з леми 3 дістанемо $(G,\mathbb{Z}_p,\lambda)\cong\mathbb{Z}_pG$ для довільного $[\lambda]\in M$ ($\mathbb{Z}_pG$ - групове кільце групи G над кільцем $\mathbb{Z}_p$). Отже, $A_{\mathbb{Q}}(G,\mathbb{Z}_p,V_p)\cong A_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Z}_pG)$. Тепер, приймаючи до уваги лему 2, одержуємо, що алгебра $A_{\mathbb{Q}}(G,\mathbb{Z}_p,V_p)$ є напівпростою.

Далі нехай існує такий елемент $[\lambda]\in M$, що $H(\lambda)\not\cong\mathbb{Z}_pH$. Покажемо, що тоді $G=H\times B$, де B - деяка p'-підгрупа групи G. При $p=2$ це твердження очевидне. Через це надалі будемо вважати, що $p\ne 2$. Легко бачити, що в $H(\lambda)$ реалізується $(\mathbb{Z}_p,V_p)$-зображення $\Delta:a\to\Delta(a)$ групи $H=\langle a\rangle$, що задовольняє умову

$$\Delta(a)^p=(1+p)^rE\qquad(1\le r<p)\qquad(12)$$

(E - одинична матриця). Оскільки $H(\lambda)=res_H G(\lambda)$, зображення Δ продовжується до деякого $(\mathbb{Z}_p,V_p)$-зображення Γ групи G. Очевидно, що $g^{-1}a\,g=a^{t_g}$ $(1\le t_g<p)$ для довільного $g\in G$. Звідси і з (1) дістаємо, що

$$\Gamma(g)^{-1}\Gamma(a)\Gamma(g)=\gamma_{a,g}\Gamma(a)^{t_g}\qquad(\gamma_{a,g}\in V_p).$$

Із (12) і (13) випливає, що

$$(1+p)^r=\gamma_{a,g}^p(1+p)^{r\,t_g},$$

тобто

$$(1+p)^{r(1-t_g)} = \gamma^p_{a,g}.$$

Ця рівність можлива тільки тоді, коли $t_g=1$ для довільного $g \in G$ (див. [10-11]). Це означає, що $G=H\times B$. Тепер неважко показати, що

$$G(\lambda) \cong H(\lambda)\otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p B.$$

Всі нерозкладні $\mathbb{Z}_p G$-модулі зі скінченними $\mathbb{Z}_p$-базисами описані в [8]. Неважко довести, що якщо $G(\lambda) \cong \mathbb{Z}_p G$, то при $p\neq 2$ всі неізоморфні нерозкладні $G(\lambda)$-модулі (зі скінченними $\mathbb{Z}_p$-базисами) вичерпуються такими модулями:

$$H(\lambda) \# N_i \ (i=1,\dots,s), \qquad (14)$$

де $N_1,\dots,N_s$ - всі неізоморфні нерозкладні $\mathbb{Z}_p B$-модулі ($L \# N$ - зовнішний тензорний добуток $H(\lambda)$-модуля L і $\mathbb{Z}_p B$-модуля N).

При $p\neq 2$ відображення f: $\Gamma \longrightarrow [\lambda]\otimes \bar{\Gamma}$ визначає гомоморфізм алгебри $A_{\mathbb{Q}}(G,\mathbb{Z}_p,V_p)$ в алгебру $\mathbb{Q}H \otimes_{\mathbb{Q}} A_{\mathbb{Q}}(\bar{\mathbb{Z}}_p G)$, де $\bar{\mathbb{Z}}_p = \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Q}H$ - групова алгебра скінченної абелевої групи H над полем $\mathbb{Q}$, Γ - $(\mathbb{Z}_p,V_p)$-зображення групи G і $\bar{\Gamma}$ - $\bar{\mathbb{Z}}_p$-зображення групи G, одержане приведенням елементів матриць $\Gamma(g)$ ($g \in G$) за модулем $p\mathbb{Z}_p$. Із опису нерозкладних $G(\lambda)$-модулів (див. [8] і (14)) випливає, що f є мономорфним відображенням алгебри $A_{\mathbb{Q}}(G,c\mathbb{Z}_p,V_p)$ в алгебру $\Lambda=\mathbb{Q}H\otimes_{\mathbb{Q}} A_{\mathbb{Q}}(\bar{\mathbb{Z}}_p G)$. Оскільки $\mathbb{Q}H$ - сепарабельна алгебра, а $A_{\mathbb{Q}}(\bar{\mathbb{Z}}_p G)$-напівпроста алгебра (див. [12]), то алгебра Λ є напівпростою. Отже, алгебра $A_{\mathbb{Q}}(G,\mathbb{Z}_p,V_p)$ також напівпроста при $p\neq 2$.

Нехай $H=\langle a\rangle$ - група порядку2. Тоді $G=H\times B$, де B - деяка група непарного порядку. З теореми Райнера-Цассенхауза [13] алгебра $A_{\mathbb{Q}}(G,\mathbb{Z}_2,V_2)$ ізоморфно вкладається в алгебру $A(G,R_2,V_2)$, де $R_2=\mathbb{Z}_2[\theta]$ ($\theta^3=1$, $\theta\neq 1$). Із [1] виходить, що всі нееквівалентні нерозкладні (R_2,V_2)-зображення групи H вичерпуються зображеннями (10). Отже,

$$A_{\mathbb{Q}}(H,R_2,V_2) \cong A_{\mathbb{Q}}(H,\mathbb{Z}_2.V_2).$$

Неважко перевірити, що кожний нерозкладний (G,R_2,λ)-модуль має вигляд $L \# N$, де L - нерозкладний (H,R_2,λ)-модуль, а N - нерозкладний R_2B-модуль ($(H,R_2,\lambda)=res_H(G,K_2,\lambda)$). Звідси і з леми 3 дістаємо

$$A_{\mathbb{Q}}(G,R_2,V_2) \cong A_{\mathbb{Q}}(H,R_2,V_2) \otimes_{\mathbb{Q}} A_{\mathbb{Q}}(R_2B). \qquad (16)$$

Опираючись на формули (11), можна показати, що

$$A_{\mathbb{Q}}(H,\mathbb{Z}_2,V_2) \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}. \qquad (17)$$

Тепер із формул (15)-(17) і напівпростоти алгебри $A_{\mathbb{Q}}(R_2B)$ (див.[9]) одержуємо, що алгебра $A_{\mathbb{Q}}(G,R_2,V_2)$ є напівпростою. Тоді алгебра $A_{\mathbb{Q}}(G,\mathbb{Z}_2,V_2)$ також буде напівпростою. Теорема доведена.

Зауваження 1. Як відомо (див. [1]), число нееквівалентних нерозкладних $(\mathbb{Z}_p,V_p)$-зображень p-групи H порядку $|H|<\infty$ є скінченним тоді і тільки тоді, коли H - циклічна група порядку p^r ($r\leq 2$). Використовуючи описані в [1] нерозкладні $(\mathbb{Z}_p,V_p)$-зображення циклічної групи H_p порядку p^2, неважко довести, що при $p\neq 2$ радикали Джекобсона алгебр $A_{\mathbb{Q}}(H_p,\mathbb{Z}_p,V_p)$ і $A_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Z}_pH_p)$ збігаються. Однак це твердження несправедливе при $p=2$.

Радикал Джекобсона алгебри $A_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Z}_pH_p)$ описано в [5].

Зауваження 2. Нехай V - довільна підгрупа групи $\mathbb{Z}_p^*$. Можна показати, що вивчення $(\mathbb{Z}_p,V)$-зображень скінченно групи G зводиться до вивчення $(\mathbb{Z}_p, V_p)$-зображень деякої скінченної групи G.

Список літератури

1. Баранник Л.Ф., Гудивок П.М. Проективные представления конечных групп над числовыми кольцами //Математический сборник.- 1970.- Е.82, N°3.- С. 423-443.
2. Боревич З.И., Фаддеев Д.К. Теория гомологий в группах //Вестн. Ленингр. ун-та.- 1959.- N°7.- С. 72-87.
3. Reiner I. The integral representation ring of a finite group //Michigan Mat. J.- 1965.- Vol.12.-P.11-22.
4. Reiner I. Integral representation algebras //Trans. Am. Math. Soc.- 1966.- Vol.124.- P. 111-121.
5. Рудько В.П. Про тензорну алгебру цілочисло вих зображень циклічної групи порядку p^2 //Доп. АН УРСР.- 1967.- N°1.- С.35-39.
6. Conlon S.B. Relative components of representations //J. of Algebra.- 1968.- Vol.8.- P. 478-501.
7. Zemanek J.R. Nilpotent elements in representation rings //J. of Algebra.- 1971.- Vol.19.- P. 453-469.
8. Гудивок П.М., Рудько В.П. Об алгебрах модулярных и целочисленных представлений конечных групп //Изв. АН СССР. Сер. математическая.- 1973.- Т.37, N°5.- С.963-987.
9. Гудивок П.М., Рудько В.П. Тензорные произведения представлений конечных групп.- Ужгород, 1985.- 120 с.
10. Боревич З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел.- М.: Наука, 1985.- 503 с.
11. Hasse H. Zahlentheorie.- Berlin. Acad. Verlag, 1963.- 611 S.
12. Green J.A. A transfer theorem for modular

representation //J. of Algebra.- 1964.- Vol.1.- P 73-84.

13. Reiner I., Zassenhaus H. Equivalence of representations under extensions of local group rings //Ill. J. Math.- 1961.- Vol.5.- P. 409-411.