УДК 517.53

М.М.ШЕРЕМЕТА

ПРО СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ МАКСИМУМОМ МОДУЛЯ І МАКСИМАЛЬНИМ ЧЛЕНОМ ЦІЛОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ

1° Нехай $\Lambda=(\lambda_n)_{n=0}^{\infty}$ - зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел, а $S(\Lambda)$ - клас цілих (абсолютно збіжних у $\mathbb{C}$) рядів Діріхле

$$F(s)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp(s\lambda_n), \qquad s=\sigma+it. \qquad (1)$$

Покладемо $M(\sigma,F)=\sup\{|F(\sigma+it)|:\ t\in\mathbb{R}\}$. і нехай $\mu(\sigma,F)=\max\{|a_n|\exp(\sigma\lambda_n):\ n\geq 0\}$ - максимальний член ряду (1).

Через L позначимо клас неперервних невід'ємних зростаючих до $+\infty$ на $[0,+\infty)$ функцій, і будемо говорити, що $\varphi\in L$ і $\varphi(2x)\sim\varphi(x)$, $x\to+\infty$, тобто φ - повільно зростаюча функція. Нарешті, для $\psi\in L$ належність $F\in S_{\psi}(\Lambda)$ означає, що $F\in S(\Lambda)$ і

$$|a_n|\leq \exp(-\lambda_n\psi(\lambda_n)), \qquad n\geq n_0. \qquad (2)$$

Відомо [1,2], що в класі $S(\Lambda)$ не можна вказати умову на послідовність Λ, при виконанні якої $\ln M(\sigma,F)\sim\ln\mu(\sigma,F)$, $\sigma\to+\infty$. У класі $S_{\psi}(\Lambda)$, $\psi\in L$ таку умову вказати можна. Вона має [1] вигляд $\ln n=o(\psi(\lambda_n))$, $n\to\infty$, причому, як показано в [1], її не можна послабити в такому розумінні: яка б не була функція $\alpha\in L_{\text{пз}}$, існує функція $F\in S_{\psi}(\Lambda)$ така, що $\ln n=\ln o(\alpha(\lambda_n)\psi(\lambda_n))$, $n\to\infty$, і співвідношення $\ln M(\sigma,F)\sim\ln\mu(\sigma,F)$, $\sigma\to+\infty$ не виконується. Нижче доведемо наступний значно сильніший результат.

Теорема 1. Нехай $\psi \in L$. Для того, щоб для кожної функції $F \in S_\psi(\Lambda)$ виконувалось співвідношення $\ln M(\sigma,F) \sim \ln \mu(\sigma,F)$, $\sigma \to +\infty$, необхідно і досить, щоб $\ln n = o(\psi(\lambda_n))$, $n \to \infty$.

З теореми 1 випливає, що умова $\ln n = o(\psi(\lambda_n))$, $n \to \infty$ є достатньо для того, щоб $\varphi(\ln M(\sigma,F)) \sim \varphi(\ln \mu(\sigma,F))$, $\sigma \to +\infty$, для кожної степеневої чи повільно змінної функції φ. З цієї ж теореми випливає, що вказана умова для степеневої функції φ є також необхідною в класі $S_\psi(\Lambda)$. Виникає питання, чи можна її послабити у випадку, коли $\varphi \in L_{пэ}$. Позитивну відповідь дає таке твердження.

Теорема 2. Нехай $\varphi \in L_{пэ}$, $\psi \in L$ і

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\lambda_n \psi(\lambda_n)} = q < 1 . \qquad (3)$$

Для того, щоб для кожної функції $F \in S_\varphi(\Lambda)$ викрнувалось співвідношення $\varphi(\ln M(\sigma,F)) \sim \varphi(\ln \mu(\sigma,F))$, $\sigma \to +\infty$, необхідно і досить, щоб

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\varphi(\ln n)}{\varphi(\psi(\lambda_n))} \le 1 . \qquad (4)$$

Зауважимо, що в класі $S(\Lambda)$ не можна вказати умову на Λ, при виконанні якої $\varphi(\ln M(\sigma,F)) \sim \varphi(\ln \mu(\sigma,F))$, $\sigma \to +\infty$, якою б не була функція $\varphi \in L$. На це вказує наступна теорема.

Теорема 3. Які б не були послідовність Λ і функція $\varphi \in L$, існує функція $F \in S(\Lambda)$, для якої співвідношення $\varphi(\ln M(\sigma,F)) \sim \varphi(\ln \mu(\sigma,F))$, $\sigma \to +\infty$ не виконується.

2°. Достатність умови $\ln n = o(\psi(\lambda_n))$, $n \to \infty$ у теоремі 1 доведена в [1]. Доведемо достатність умови (4) у теоремі 2. Позначимо $n^{\circ}(\sigma)=\min(n:\ \psi(\lambda_n)\ge 3\sigma/(1-q))$. Тоді $n^{\circ}(\sigma)\ge n_0$ при $\sigma\ge\sigma_0$, і з (2) маємо

$$M(\sigma,F)\le \sum_{n=0}^{n^{\circ}(\sigma)-1} |a_n|\exp(\sigma\lambda_n) + \sum_{n=n^{\circ}(\sigma)}^{\infty} \exp(-\lambda_n(\psi(\lambda_n)-\sigma)) \le$$

$$\le n^{\circ}(\sigma)\mu(\sigma,F) + \sum_{n=n^{\circ}(\sigma)}^{\infty} \exp\left\{-\frac{2+q}{3}\lambda_n\psi(\lambda_n)\right\}.$$

З умови (3) випливає, що $\lambda_n\psi(\lambda_n)\ge \frac{1+o(1)}{q}\ln n$, $n\to\infty$, тобто останній ряд збіжний і

$$M(\sigma,F)\le n^{\circ}(\sigma)\mu(\sigma,F)+K,\quad K=const.$$

Оскільки $\varphi\in L_{\text{пз}}$, то

$$\varphi(\ln M(\sigma,F))\le\varphi(\ln n^{\circ}(\sigma)+\ln\mu(\sigma,F)+o(1))\le$$
$$\le\varphi(2\max(\ln n^{\circ}(\sigma),\ \ln\mu(\sigma,F))+o(1))\le$$
$$\le(1+o(1))\varphi(\max(\ln n^{\circ}(\sigma),\ \ln\mu(\sigma,F)))=$$
$$=(1+o(1))\max(\varphi(\ln n^{\circ}(\sigma)),\ \varphi(\ln\mu(\sigma,F))),\quad \sigma\to+\infty.$$

Отже, оскільки $\mu(\sigma,F)\le M(\sigma,F)$, $\sigma\in\mathbb{R}$ нам залишилось довести, що $\varphi(\ln n^{\circ}(\sigma))\le(1+o(1))\varphi(\ln\mu(\sigma,F))$, $\sigma\to+\infty$. Але $\ln\mu(\sigma,F)\ge\sigma$ для всіх досить великих σ. Тому з означення $n^{\circ}(\sigma)$ і умови (4) маємо

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\varphi(\ln n^{\circ}(\sigma))}{\varphi(\ln\mu(\sigma,F))}\le\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\varphi(\ln(n^{\circ}(\sigma)-1))}{\varphi(\sigma)}=$$

$$=\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\varphi(\ln(n^{\circ}(\sigma)-1))}{\varphi(\psi(\lambda_{n^{\circ}(\sigma)-1}))}\ \frac{\varphi(\psi(\lambda_{n^{\circ}(\sigma)-1}))}{\varphi(\sigma)}\le$$

$$\le\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{\varphi(\ln n)}{\varphi(\psi(\lambda_n))}\ \varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\varphi(3\sigma/(1-q))}{\varphi(\sigma)}\le 1,$$

і отже, достатність умови (4) у теоремі 2 доведена.

3°. Для доведення необхідності в теоремах 1,2 і теореми 3 нам потрібні деякі леми. Для послідовності $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ комплексних чисел позначимо

$$\varkappa_n=\frac{\ln|b_n|-\ln|b_{n+1}|}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}, \qquad n\in\mathbb{Z}_+,$$

а для функціональної послідовності $(b_n\exp(\sigma\lambda_n))_{n=0}^{\infty}$, $\sigma\in\mathbb{R}$, через $\mu(\sigma)$ позначимо максимальний член.

Лема 1 [3] . Якщо $\varkappa_n\nearrow+\infty$, то $\mu(\sigma)=|b_n|\exp(\sigma\lambda_n)$ при $\varkappa_{n-1}\le\sigma\le\varkappa_n$.

Нехай тепер (n_k) і (m_k) - послідовності натуральних чисел такі, що $n_k-m_k\ge3$ і $0<m_1<n_1<m_2<n_2<\ldots$. Покладемо $a_n=b_n$ при $m_k\le n\le n_k$ і $a_n=0$ при $n<m_1$ і $n_k<n<m_k$, $k\in\mathbb{N}$.

Лема 2 [3] .Якщо ряд Діріхле (1) з так вибраними коефіцієнтами a_n цілий, то $\mu(\varkappa_{n-1},F)=|a_n|\exp(\varkappa_{n-1}\lambda_n)$ для всіх n , $m_k<n<n_k$.

Наступна лема є важливою при доведенні теорем 1-3.

Лема 3. Нехай $\psi\in L$, виконується умова (3) і $\alpha\in L_{пз}$. Нехай (n_k) - зростаюча послідовність натуральних чисел, $m_k=[\frac{1}{2}n_k]$ і для всіх $k\in\mathbb{N}$ виконуються нерівності

$$n_1\ge1\ ,\ n_{k+1}\ge4n_k\ ,\ \psi(\lambda_n)\ge2\psi(\lambda_{n_{k-1}})\ ,\ \lambda_{m_k}>\lambda_{n_{k-1}}. \qquad (5)$$

Тоді існують функція $F\in S_\psi(\Lambda)$ і зростаюча до $+\infty$ послідовність (σ_k) такі, що

$$\sigma_k=2(1+o(1))\psi(\lambda_{n_k})\ ,\ k\to\infty\ , \qquad (6)$$

$$\ln\mu(\sigma_k,F)\le2(1+o(1))\alpha(\lambda_{n_k})\psi(\lambda_{n_k})\ ,\ k\to\infty\ , \qquad (7)$$

$$M(\sigma_k,F)\ge\frac{1}{2}n_k\,\mu(\sigma_k,F)\ ,\ k\in\mathbb{N}\ . \qquad (8)$$

Доведення. Покладаемо

$$a^*(x) = \begin{cases} a(\lambda_{m_k}), & \lambda_{m_k} \le x \le \lambda_{n_k}, \\ a(x), & \lambda_{n_{k-1}} < x < \lambda_{m_k}. \end{cases}$$

Ясно, що $a^*(x) \le a(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$, і оскільки $a \in L_{пз}$, то

$$(\lambda_j - a^*(\lambda_j))/\lambda_j \ge \frac{2}{3} \qquad (9)$$

для всіх досить великих j. Для простоти будемо вважати, що нерівність (9) виконується для всіх $j \in \mathbb{N}$. Покладемо також

$$a_{n_k} = \exp(-2\lambda_{n_k} \psi(\lambda_{n_k})), \quad k \in \mathbb{N}, \qquad (10)$$

і

$$æ_{n_k - 1} = \frac{2\lambda_{n_k} \psi(\lambda_{n_k})}{\lambda_{n_k} - a^*(\lambda_{n_k})}, \quad k \in \mathbb{N}. \qquad (11)$$

Тоді, завдяки умові (5) і нерівності (9), маємо

$$æ_{n_{k+1}-1} = \frac{2\lambda_{n_{k+1}} \psi(\lambda_{n_k})}{\lambda_{n_{k+1}} - a^*(\lambda_{n_k})} \ge \frac{4\lambda_{n_{k+1}} \psi(\lambda_{n_{k+1}})}{\lambda_{n_{k+1}} - a^*(\lambda_{n_{k+1}})} =$$

$$= \frac{2\lambda_{n_k} \psi(\lambda_{n_k})}{\lambda_{n_k} - a^*(\lambda_{n_k})} \; \frac{\lambda_{n_{k+1}}}{\lambda_{n_{k+1}} - a^*(\lambda_{n_{k+1}})} \; \frac{2(\lambda_{n_k} - a^*(\lambda_{n_k}))}{\lambda_{n_k}} \ge \frac{4}{3} æ_{n_k} - 1,$$

тобто $æ_{n_k - 1} \uparrow +\infty$, $k \to \infty$. Покладемо, нарешті,

$$a_j = \begin{cases} a_{n_k} \exp(æ_{n_k-1}(\lambda_{n_k} - \lambda_j)), & m_k \le j \le n_k \\ 0, & n_{k-1} < j < m_k, \end{cases} \qquad (12)$$

і покажемо, що ряд Діріхле (1) з такими коефіцієнтами a_n задає цілу функцію $F \in S_\psi(\Lambda)$. Ясно, що $a_{n_k} \le \exp(-\lambda_{n_k} \psi(\lambda_{n_k}))$, $k \in \mathbb{N}$, а при $m_k \le j \le n_k - 1$ з (10),(11),(12),(9) і означення функції a^* маємо

$$a_j = \exp\left\{-2\lambda_{n_k} \psi(\lambda_{n_k}) + \frac{2\lambda_{n_k} \psi(\lambda_{n_k})}{\lambda_{n_k} - a^*(\lambda_{n_k})} (\lambda_{n_k} - \lambda_j)\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{2\lambda_{n_k}\psi(\lambda_{n_k})(\lambda_j-\alpha^*(\lambda_{n_k}))}{\lambda_{n_k}-\alpha^*(\lambda_{n_k})}\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\lambda_j\psi(\lambda_{n_k})\,\frac{\lambda_{n_k}}{\lambda_{n_k}-\alpha^*(\lambda_{n_k})}\,\frac{2(\lambda_j-\alpha^*(\lambda_j))}{\lambda_j}\right\} \le$$

$$\le \exp\left\{-\frac{4}{3}\lambda_j\psi(\lambda_j)\right\} < \exp\left\{-\lambda_j\psi(\lambda_j)\right\},$$

тобто виконується умова (2). З (2) і (3) для кожного фіксованого $\sigma \in \mathbb{R}$ при $n \to \infty$ маємо $a_n \exp(\sigma\lambda_n) \le \le \exp\left\{-\frac{1+o(1)}{q}\ln n\right\}$, і, оскільки $q<1$, ряд (1) з коефіцієнтами (12) задає цілу функцію $F \in S_\psi(\Lambda)$.

Визначимо тепер $æ_n = æ_{n_{k-1}}$ при $m_k < n \le n_k$, а при $n_{k-1} < n \le m_k$ виберемо $æ_n$ так, щоб послідовність (b_n) задовольняла умовам лем 1 і 2. За лемою 2 маємо

$$\mu(æ_{n_{k-1}}, F) = a_{n_k}\exp\left\{\lambda_{n_k}æ_{n_{k-1}}\right\} =$$

$$= \exp\left\{-2\alpha^*(\lambda_{n_k})\psi(\lambda_{n_k}) + 2\lambda_{n_k}^2\psi(\lambda_{n_k})/(\lambda_{n_k})\right\} =$$

$$= \exp\left\{2\alpha^*(\lambda_{n_k})\psi(\lambda_{n_k})\lambda_{n_k}/(\lambda_{n_k}-\alpha^*(\lambda_{n_k}))\right\},$$

звідки випливає, що

$$\ln \mu(æ_{n_{k-1}}, F) = 2(1+o(1))\alpha^*(\lambda_{n_k})\psi(\lambda_{n_k}), \quad k \to \infty. \quad (13)$$

Далі, завдяки (12), маємо

$$M(æ_{n_{k-1}}, F) \ge \sum_{j=m_k}^{n_k-1} a_j \exp(æ_{n_{k-1}}\lambda_j) = \sum_{j=m_k}^{n_k-1} a_{n_k}\exp(æ_{n_{k-1}}\lambda_{n_k}) =$$

$$= (n_k - m_k)\mu(æ_{n_{k-1}}, F) \ge \frac{1}{2} n_k \mu(æ_{n_{k-1}}, F). \quad (14)$$

Якщо тепер позначимо $\sigma_k = æ_{n_{k-1}}$, то з (11) випливатиме, що $\sigma_k=2(1+o(1))\psi(\lambda_{n_k})$, $k\to\infty$, а з (13) і (14), завдяки нерівності $\alpha^*(x)\le\alpha(x)$, отримуємо відповідно співвідношення (7) і (8). Лема 3 доведена.

4°. Доведемо необхідність відповідних умов у теоремах 1 і 2 і теорему 3. Почнемо з теореми 3. Нехай $n_\Lambda(t)=\sum\limits_{\lambda_k\le t}1$ - рахувальна функція послідовності Λ. Тоді $n_\Lambda(t)\to+\infty$, $t\to+\infty$, і існує функція $\gamma\in L_{пв}$ така, що $\ln n(t)\ge\gamma(t)$ для всіх $t\ge\lambda_1$. Оскільки для кожної функції $\varphi\in L$ виконується $\varphi^{-1}\left(\frac{1}{2}\varphi(\gamma(t))\right)\to+\infty$, $t\to+\infty$, то існує функція $\psi\in L$ така, що $\varphi^{-1}\left(\frac{1}{2}\varphi(\gamma(t))\right)\to+\infty$, $t\to+\infty$. Виберемо, нарешті, функцію $\alpha\in L_{пв}$ так, щоб $\alpha(t)\le\varphi^{-1}\left(\frac{1}{2}\varphi(\gamma(t))\right)/3\psi(t)$, і послідовність (n_k) натуральних чисел, яка б задовольняла умови (5). Тоді за лемою 3 існують функція $F\in S_\psi(\Lambda)$ і послідовність $(\sigma_k)\uparrow+\infty$, $k\to\infty$, такі, що

$$\varphi(\ln M(\sigma_k,F))\ge\varphi(\ln n_k+\ln\mu(\sigma_n,F)-\ln 2)\ge\varphi(\ln n_k)\ge$$

$$\ge\varphi(\gamma(\lambda_{n_k}))\ge 2\varphi(3\alpha(\lambda_{n_k})\varphi(\lambda_{n_k}))\ge 2\varphi(\ln\mu(\sigma_k,F)),$$

тобто співвідношення $\varphi(\ln M(\sigma,F))\sim\varphi(\ln\mu(\sigma,F))$, $\sigma\to+\infty$, не виконується.

5°. Щоб завершити доведення теореми 1, нам треба показати, що для кожної послідовності Λ такої, що $\ln n_k/\psi(\lambda_{n_k})\to+\infty$, $k\to\infty$, для деякої зростаючої послідовності (n_k), існує функція $F\in S_\psi(\Lambda)$, для якої співвідношення $\ln M(\sigma,F)\sim\ln\mu(\sigma,F)$, $\sigma\to+\infty$, не виконується. Припустимо спочатку, що Λ задовольняє умову (3), і побудуємо функцію $\alpha\in L_{пв}$ таку, що

$\alpha(\lambda_{n_k})\le \ln n_k/\psi(\lambda_{n_k})$. При такому виборі функції α для побудованої у лемі 3 функції $F\notin S_\psi(\Lambda)$ маємо

$$\ln M(\sigma_k,F)\ge \ln n_k+\ln \mu(\sigma_k,F)-\ln 2\ge$$
$$\ge \alpha(\lambda_{n_k})\psi(\lambda_{n_k})+\ln \mu(\sigma_k,F)-\ln 2\ge$$
$$\ge \frac{3}{2}(1+o(1))\ln \mu(\sigma_k,F),\quad k\to\infty,$$

тобто теорема 1 у випадку виконання умови (3) доведена.

Щоб завершити доведення теореми 1, покажемо, що з кожної послідовності Λ такої, що $\ln n_k\ge\alpha(\lambda_{n_k})\psi(\lambda_{n_k})$ для деяких функції $\alpha\in L_{\text{пв}}$ і послідовності $(n_k)\uparrow\infty$, $k\to\infty$, можна виділити підпослідовність $\Lambda^*=(\lambda_m^*)$, для якої $\ln m_k\ge$ $\ge\frac{1}{2}\alpha(\lambda_{m_k}^*)\psi(\lambda_{m_k}^*)$ для деякої послідовності $(m_k)\uparrow\infty$, $k\to\infty$, і $\ln m\le\frac{1}{2}\lambda_m^*\psi(\lambda_{n_k})$ для всіх $m\in\mathbb{N}$. Можемо вважати, що $\lambda_0=0$. Тоді $\ln n_\Lambda(x)=0$ при $0\le x\le\lambda_1$, тобто $\ln n_\Lambda(x)\le\frac{1}{2}x\psi(x)$ на $[0,\lambda_1)$. Вважаючи, не зменшуючи загальності, що $\alpha(x)\le\frac{1}{2}x$ для всіх $x\ge\lambda_1$, позначимо $x_1=\inf\{x:\ \ln n_\Lambda(x)>\frac{1}{2}x\psi(x)\}$, проведемо пряму $y=n_\Lambda(x_1)$ і через x_1^* позначимо абсцису її точки перетину з кривою $y=\alpha(x)\psi(x)$. Всі точки λ_n, які лежать на $[x_1,x_1^*]$, з послідовності Λ викинемо. Ясно, що для послідовності Λ_1, що залишалася, $\ln n_{\Lambda_1}(x)\le\frac{1}{2}x\psi(x)$, $0\le x\le x_1^*$ і $\ln n_{\Lambda_1}(x_1^*)\ge\alpha(x_1^*)\psi(x_1^*)-1$. Якщо для всіх $x\ge x_1^*$ виконується нерівність $\ln n_{\Lambda_1}(x)\le\frac{1}{2}x\psi(x)$, то покладаємо $\Lambda^*=\Lambda_1$ і побудову завершуємо. Якщо ця нерівність не виконується, то нехай $x_2=\inf\{x>x_1^*:\ \ln n_{\Lambda_1}(x)>\frac{1}{2}x\psi(x)\}$. Для точки x_2 вказаним вище чином будуємо точку x_2^* і, якщо треба, процес продовжуємо. В результаті побудуємо послідовність Λ^* таку, що $\ln n_{\Lambda^*}(x) \le \frac{1}{2} x\psi(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$ і $\ln n_{\Lambda^*}(x_k^*) \ge \alpha(x_k^*)\psi(x_k^*)-1 \ge \frac{1}{2}\alpha(x_k^*)\psi(x_k^*)$, $k \ge k_0$.

Якщо тепер візьмемо $a_n^*=0$, коли $\lambda_n \notin \Lambda^*$, і $a_n^*=a_n$, коли $\lambda_n \in \Lambda^*$, де a_n - коефіцієнти побудованої вище за $\frac{1}{2}\alpha(x)$ функції $F \in S_\psi(\Lambda)$, то для цілого ряду Діріхле з такими коефіцієнтами a_n^* співвідношення $\ln M(\sigma,F) \sim \ln \mu(\sigma,F)$, $\sigma \to +\infty$, не буде виконуватися. Теорема 1 повністю доведена.

6°. Завершимо доведення теореми 2. Нехай Λ - довільна послідовність така, що $\varphi(\ln n_k) \ge (1+\rho)\varphi(\psi(\lambda_{n_k}))$ для деяких числа $\rho>0$ і послідовності $(n_k)\uparrow\infty$, $k\to\infty$. Можемо вважати, що (n_k) задовольняє умови (5). Оскільки $\varphi \in L_{\text{пв}}$, то неважко показати, що $\frac{1}{x}\varphi^{-1}\left((1+\frac{\rho}{2})\varphi(x)\right) \to +\infty$, $x \to +\infty$. Виберемо $\alpha \in L_{\text{пв}}$ так, щоб $\alpha(\psi^{-1}(x)) \le \varphi^{-1}\left((1+\frac{\rho}{2})\varphi(x)\right)/x$. При такому виборі функції α для побудованої в лемі 3 функції $F \in S_\psi(\Lambda)$ маємо

$$\varphi(\ln M(\sigma_k,F)) \ge \varphi(\ln n_k) \ge (1+\rho)\varphi(\psi(\lambda_{n_k})) =$$

$$= (1+\rho)\frac{\varphi(\psi(\lambda_{n_k}))}{\varphi(\psi(\lambda_{n_k})\alpha(\psi^{-1}(\psi(\lambda_{n_k}))))}\varphi(\alpha(\lambda_{n_k})\psi(\lambda_{n_k})) \ge$$

$$\ge \frac{1+\rho}{1+\rho/2}(1+o(1))\varphi(\ln \mu(\sigma_k,F)),\quad k\to\infty,$$

тобто теорема 2 доведена повністю.

На відміну від теореми 1 в умовах теореми 2 є додаткова вимога (3) на послідовність Λ. Її можна усунути, якщо накласти додаткову умову на функції ψ і φ.

<u>Теорема 2'.</u> Нехай $\psi \in L$, $\varphi \in L_{\text{пв}}$ і

$$\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{\varphi(x\psi^{-1}(x))} = \sigma < 1.$$

Для того, щоб для кожної функції $f \in S_\psi(\Lambda)$ мало місце співвідношення $\varphi(\ln M(\sigma,F)) \sim \varphi(\ln \mu(\sigma,F))$, $\sigma \to +\infty$, необхідно і досить, щоб виконувалась умова (4).

Доведення. Щоб довести достатність умови (4), досить за теоремою 2 показати, що з (4) і (15) випливає (3). Оскільки $\varphi \in L_{\text{пв}}$ і $\alpha < 1$, то

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n \psi(\lambda_n)} \le \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\varphi^{-1}((1+o(1))\varphi(\psi(\lambda_n)))}{\lambda_n \psi(\lambda_n)} \le$$

$$\le \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\varphi^{-1}((1+o(1))\varphi(x))}{x\,\psi^{-1}(x)} \le \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\varphi^{-1}((1+o(1))\varphi(x))}{\varphi^{-1}\left(\frac{1}{\delta}(1+o(1))\varphi(x)\right)} = 0.$$

Необхідність умови (4) у випадку виконання умови (3) доведена вище. Якщо ж умова (3) не виконується, то можемо поступити, як при доведенні теореми 1, виділивши з послідовності Λ підпослідовність Λ^*, для якої умова (3) виконується, але умова (4) не виконується, і аналогічно завершити доведення теореми 2.

Слід зауважити, що якщо $\varphi(x) \sim \varphi(x\,\psi^{-1}(x))$, $x \to +\infty$, то з умови (3) випливає (4). Тому при виконанні умов $\varphi \in L_{\text{пв}}$, $\psi \in L$ і (3) у даному випадку для кожної функції $F \in S_\psi(\Lambda)$ виконується співвідношення $\varphi(\ln M(\sigma,F)) \sim \varphi(\ln \mu(\sigma,F))$, $\sigma \to +\infty$. Питання про істотність умови (3) у цьому твердженні потребує додаткового вивчення.

Список літератури

1. Шеремета М.Н. О полной эквивалентности логарифмов максимума модуля и максимального члена целого ряда Дирихле //Мат. заметки.- 1990.- Т. .- С.

2. Скасків О.Б. Про наявність виняткових значень у опівввідношенні типу Бореля для цілих рядів Діріхле //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-математична.- 1988.- Вип.3.- С. 53-54.

3. Шеремета М.Н. Об эквивалентности логарифмов максимума модуля и максимального члена целого ряда Дирихле //Мат. заметки.- 1987.- Т.42, №2.- С.215-226.