УДК 517.946+519.6+511.2

Б.Й.ПТАШНИК, В.В.ФІГОЛЬ, П.І.ШТАБАЛЮК

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ, СТІЙКІСТЬ І РЕГУЛЯРИЗАЦІЯ БАГАТОТОЧКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

Дана робота є розвитком робіт [1-4]. У ній вивчаються питання однозначної розв'язності в різних функціональних просторах задачі з багатоточковими умовами за часовою координатою та умовами періодичності за просторовими змінними для гіперболічних рівнянь зі сталими коеффіцієнтами. За додаткової умови "обмеженості енергії" досліджується стійкість даної задачі та побудова наближеного розв'язку методом регуляризації за А.М.Тихоновим.

Надалі використовуватимемо такі позначення: $x=(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{R}^p$, $k=(k_1,\dots,k_p)\in\mathbb{Z}^p$, $s=(s_0,s_1,\dots,s_p)\in\mathbb{Z}_+^{p+1}$, $(k,x)=k_1x_1+\dots+k_px_p$, $\|k\|=\sqrt{k_1^2+,\dots,k_p^2}$; $|k|=|k_1|+\dots+|k_p|$; $|s|=s_0+s_1+\dots+s_p$; Ω_p - p-вимірний тор $\{x\in\mathbb{R}^p : 0\le x_r\le 2\pi,\ r=\overline{1,p}\}$, $D_p=\{(t,x)) : t\in[0,T],\ x\in\Omega_p\}$; $H_q(\Omega_p)$ - гільбертів простір комплекснозначних функцій $v(x)=\sum_{|k|\ge 0} v_k \exp(ik,x)$ зі скалярним добутком, що індукує норму $\|v\|_{H_q(\Omega_p)}=(2\pi)^p\sum_{|k|\ge 0}(1+\|k\|^2)^q|v_k|^2$; $H_q^n(D_p)$ $(q\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{Z}_+)$ - гільбертів простір функцій $u(t,x)$ таких, що $\partial^r u(t,x)/\partial t^r$, $r=\overline{0,n}$ для кожного $t\in[0,T]$ належить простору $H_{q-r}(\Omega_p)$ і неперервна за t у нормі цього простору; I - простір тригонометричних многочленів $P(x)=\sum_{k=-m}^{m} c_k\exp(ik,x)$.

$x \in [0,2\pi]$, $m=0,1,\ldots$ з комплексними коефіцієнтами, в якому збіжність визначається так: $I \ni P_n \xrightarrow[I]{} P$, якщо степені всіх поліномів $P_n(x)$ не перевищують деякого фіксованого числа N і при $n \to \infty$ $P_n(x) \to P(x)$, I' - простір усіх лінійних неперервних функціоналів над I зі слабкою збіжністю, який збігається з простором формальних тригонометричних рядів (див.[5,гл.2,§6]), аналогічні позначення зберігаємо і в багатовимірному випадку; $C^n([0,T],I)$ $(C^n([0,T],I'))$ - простір функцій $u(t,x)$, які для кожного $t \in [0,T]$ є функціями з простору $I(I')$ і неперервно залежать від t разом з похідними до порядку n.

1. В області D_p розглядається задача

$$Lu \equiv \sum_{|s|=n} A_s \frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_p^{s_p}} = 0, \qquad (1)$$

$$u(t_j,x)=\phi_j(x) \qquad (j=\overline{1,n};\ 0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n \le T), \quad (2)$$

де $A_s \in \mathbb{R}$, $A_{n,0,\ldots,0}=1$, оператор L - строго гіперболічний за Петровським, тобто для довільного $\eta \in \mathbb{R}^p$ всі корені $\lambda(\eta)$ рівняння

$$\sum_{|s|=n} A_s \lambda^{s_0} \eta_1^{s_1} \ldots \eta_p^{s_p} = 0 \qquad (3)$$

дійсні та різні. Вигляд області D_p накладає умови 2π-періодичності за $x_1,\ldots,x_p$ на шуканий розв'язок і функції $\phi_j(x)$, $j=\overline{1,n}$.

Розв'язок задачі (1),(2) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{\|k\| \ge 0} u_k(t) \exp(ik,x). \qquad (4)$$

Тоді $u_k(t)$ визначається як розв'язок задачі

$$\sum_{|s|=n} A_s (ik_1)^{s_1} \dots (ik_p)^{s_p} \frac{d^{s_0} u_k(t)}{dt^{s_0}} = 0 \quad (0^0 \equiv 1), \quad (5)$$

$$u_k(t_j) = \phi_{jk}, \qquad j=\overline{1,n}, \qquad (6)$$

де ϕ_{jk}- коефіцієнти Фур'є функції $\phi_j(x)$. Позначимо $\lambda_q(k)$, $k\neq(0)$; $q=\overline{1,n}$ корені рівняння (3) при $\eta_r=k_r/\|k\|$ (вони є обмежені зверху рівномірно по k).

Рівняння (5) має таку фундаментальну систему розв'язків

$$Y_{kj}(t) = \begin{cases} exp\left(i\lambda_j(k)\|k\|t\right), & k\neq(0) \\ t^{j-1}, & k=(0), \quad j=\overline{1,n}. \end{cases} \qquad (7)$$

При $k=(0)$ задача (5),(6) завжди має єдиний розв'язок, який є многочленом $(n-1)$-го степеня. Для кожного $k\neq(0)$ розв'язок задачі (5),(6) зображується формулою

$$u_k(t) = \sum_{j=1}^{n} c_{kj}\, exp\left(i\lambda_j(k)\|k\|t\right), \qquad (8)$$

де c_{kj} визначаються зі системи рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n} c_{kj}\, exp\left(i\lambda_j(k)\|k\|t_\gamma\right) = \phi_{\gamma k}, \quad \gamma=\overline{1,n}, \quad (9)$$

визначник якої позначимо $\Delta(k,t)=\Delta(k)$, $t=(t_1,\dots,t_n)$.

Теорема 1. Для єдиності розв'язку задачі (1),(2) у просторі $C^n([0,T],I')$ необхідно і досить, щоб виконувалась умова

$$\Delta(k) \neq 0, \qquad k \in \mathbb{Z}^p\setminus\{(0)\}. \qquad (10)$$

Доведення випливає з єдиності розвинення функції $v(x) \in I'$ у ряд Фур'є.

Припустимо, що умова (10) виконана. Тоді для кожного задача (5),(6) має єдиний розв'язок, а розв'язок задачі

(1),(2) зображається формально рядом

$$u(t,x) = u_0(t) +$$

$$+ \sum_{\|k\|>0} \sum_{j,\gamma=1}^{n} \frac{\Delta_{\gamma j}(k)\, \phi_{\gamma k}\, \exp\left(i\left((k\ x)+\lambda_j(k)\|k\|t\right)\right)}{\Delta(k)}, \quad (11)$$

де $\Delta_{\gamma j}(k,t)=\Delta_{\gamma j}(k)$ - алгебраїчне доповнення елемента $e^{i\lambda_j(k)\|k\|t_\gamma}$ у визначнику $\Delta(k)$. Отже, ми прийшли до такого твердження.

<u>Теорема 2.</u> Нехай виконана умова (10) і нехай $\phi_j(x) \in I(I')$. Тоді існує розв'язок задачі (1),(2), який належить простору $C^n([0,T],I)$ ($C^n([0,T],I')$) і неперервно залежить від $\phi_\gamma(x)$, $\gamma=\overline{1,n}$. Для проміжних просторів розв'язок задачі (1),(2) може не існувати, а питання про її розв'язність пов'язане з проблемою малих знаменників.

<u>Теорема 3.</u> Нехай має місце умова (10) і існують додатні константи M і ν такі, що для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ виконується нерівність

$$|\Delta_{\gamma j}(k)/\Delta(k)| \le M\|k\|^\nu, \qquad \gamma,j=\overline{1,n}. \qquad (12)$$

Якщо $\phi_\gamma(x) \in H_s(\Omega_p)$, $s=\nu+q$, $q\ge n$, то існує розв'язок задачі (1),(2), який належить $H_q^n(D_p)$ і неперервно залежить від $\phi_\gamma(x)$.

<u>Доведення</u>. На основі (11) і (12) отримуємо нерівність

$$\|u(t,x)\|_{H_q^n(D_p)} \le c \sum_{\gamma=1}^{n} \|\phi_\gamma(x)\|_{H_s(\Omega_p)}, \qquad s=\nu+q, \quad (13)$$

з якої випливає доведення теореми.

Розглянемо питання про виконання оцінок (12). Величини $|\Delta_{\gamma j}(k)|$ рівномірно обмежені зверху для всіх векторів k ,

$\|k\|>0$. Оцінимо знизу визначник $|\Delta(k)|$. При цьому використовуємо такі твердження.

Лема 1. [6]. Нехай $f(y)=f(y_1,\dots,y_l)$ - дійсна функція $(q+1)$ разів $(q\geq 1)$ диференційовна за всіма аргументами в обмеженій однозв'язній області $G\subset \mathbb{R}^l$. Якщо в G $|D^q f(y)|\geq \delta>0$, $q=(q_1,\dots,q_l)$, то міра (Лебега) множини тих $y\in G$, для яких $|f(y)|<\varepsilon$, не перевищує величини $c_q\sqrt[q]{\varepsilon/\delta}$, де c_q - константа, що не залежить від ε і δ .

Лема 2. (Борель-Кантелі) [7]. Нехай M_r, $r\in\mathbb{N}$ - послідовність вимірних множин із $\mathbb{R}^d$, причому $\sum\limits_{r=1}^{\infty} mes\, M_r<\infty$. Тоді міра (Лебега) множини точок із $\mathbb{R}^d$, що потрапляють в безмежне число M_r, дорівнює нулеві.

Теорема 4. Для майже всіх (щодо міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $t=(t_1,\dots,t_n)\in[0,T]^n$ і для довільних фіксованих коефіцієнтів рівняння (1) оцінка (14)

$$|\Delta(k)|\equiv|\Delta(k,t)|>\|k\|^{-n(n-1)p/2-\delta},\quad \delta>0 \quad (14)$$

виконується для всіх (крім скінченного числа) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$.

Доведення. Позначимо $\gamma_j=\|k\|\lambda_j(k)$, $j=\overline{1,n}$. Функції $g_q(k,t)$, $q=\overline{1,n(n-1)/2}$ побудуємо так:

$$g_1(k,t)=\exp(-i\gamma_1 t_n)\Delta(k);\quad \partial g_1(k,t)/\partial t_n=\sum_{j=2} i\|k\|(\lambda_j-\lambda_1)\times$$

$$\times A_{nj}\exp(i(\gamma_j-\gamma_1)t_n)\equiv i\|k\|\exp(i(\gamma_2-\gamma_1)t_n)g_2(k,t);\dots,$$

$$g_r(k,t)=\sum_{j=r}\prod_{s=1}(\lambda_j-\lambda_s)A_{nj}\exp(i(\gamma_j-\gamma_r)t_n),\ r=\overline{1,n-1},\quad (15)$$

де A_{nj}- алгебраїчне доповнення елемента $\exp(i\gamma_j t_n)$ у визначнику $\Delta(k)$.

$$\partial g_{n-1}(k,t)/\partial t_n = i\|k\| \prod_{s=1} (\lambda_n-\lambda_s)A_{nn} exp(i(\gamma_n-\gamma_{n-1})),$$

$$g_n(k,t) = \prod_{s=1}^{n-1} (\lambda_n-\lambda_s)A_{nn} exp(-i\gamma_1 t_{n-1}),$$

$$\partial g_n(k,t)/\partial t_{n-1} = i\|k\| \sum_{j=2}^{n-1} (\lambda_j-\lambda_1) \prod_{s=1}^{n-1} (\lambda_n-\lambda_s)A_{n-1,j} exp(i(\gamma_j-$$

$$-\gamma_1)t_{n-1}) = i\|k\| \; exp(i(\gamma_2-\gamma_1)t_{n-1})g_{n+1}(k,t);\dots,$$

$$g_{n+r-1}(k,t) = \sum_{j=r}^{n-1} \prod_{s=1}^{r-1} (\lambda_j-\lambda_s)A_{n-1,j} exp(i(\gamma_j-\gamma_r)t_{n-1}) \times$$

$$\times \prod_{s=1}^{n-1} (\lambda_n-\lambda_s), \qquad r=\overline{1,2n-2}, \qquad (16)$$

де $A_{n-1,j}$- алгебраїчне допов нення елемента $e^{i\gamma_j t_{n-1}}$ у визначнику A_{nn};

$$\partial g_{2n-3}(k,t)/\partial t_{n-1} = i\|k\| \prod_{s=1}^{n-1} (\lambda_n-\lambda_s) \prod_{s=1}^{n-2} (\lambda_{n-1}-\lambda_s)A_{n-1,n-1} \times$$

$$\times exp(i(\gamma_{n-1}-\gamma_{n-2})t_{n-1}) \equiv i\|k\| \; exp(i\gamma_1 t_{n-2})g_{2n-2}(k,t);\dots,$$

$$g_{\nu(n)}(k,t) = \prod_{\substack{1\le r<s\le n \\ s\ne 2}} (\lambda_s-\lambda_r)(exp(i(\gamma_2-\gamma_1)t_2-exp(i\gamma_2 t_1))), \quad (17)$$

$$\partial g_{\nu(n)}(k,t)/\partial t_2 = i\|k\| \prod_{1\le r<s\le n} (\lambda_s-\lambda_r)exp(i((\gamma_2-\gamma_1)t_2+\gamma_1 t_1)), (18)$$

де $\nu(n)=n(n-1)/2$. Із (18) та строгої гіперболічності рівняння (1) випливае оцінка

$$|\partial g_{\nu(n)}(k,t)/\partial t_2| > M_1\|k\|. \qquad (19)$$

За нерівністю (19) інтервал $[0,T]$ розбиваеться на підмножини A, B, $A \cup B = [0,T]$, такі, що

$$\forall t_2 \in A \quad |Re\; \partial g_{\nu(n)}(k,t)/\partial t_2| > M_1\|k\|/\sqrt{2}, \quad (20)$$

$$\forall t_2 \in B \quad |Im\; \partial g_{\nu(n)}(k,t)/\partial t_2| > M_1\|k\|/\sqrt{2}. \quad (21)$$

На основі леми 1 для кожного з інтегралів множини A

отримуємо оцінку

$$mes(t_2: |Re\ g_{\nu(n)}(k,t)|\le\|k\|^{-p-\varepsilon_1}) \le c_1\|k\|^{-p-1-\varepsilon_1}.$$

Функція $Re\ g_{\nu(n)}(k,t)=-\|k\| \prod\limits_{1\le r<s\le n}(\lambda_s-\lambda_r)\ sin(\gamma_1 t_1 + $ $+(\gamma_2-\gamma_1)t_2)$ періодична за t_2 з періодом $2\pi/|\gamma_2-\gamma_1|$; тому множина A складається не більше, ніж із $c_2|\gamma_2-\gamma_1|\le c_3\|k\|$ інтервалів. Отже,

$$mes(t_2\in B: |Re\ g_{\nu(n)}(k,t)|\le\|k\|^{-p-\varepsilon_1}) \le c_4\|k\|^{-p-\varepsilon_1}. \quad (22)$$

Аналогічно отримуємо

$$mes(t_2\in B: |Im\ g_{\nu(n)}(k,t)|\le\|k\|^{-p-\varepsilon_1}) \le c_5\|k\|^{-p-\varepsilon_1}. \quad (23)$$

Із (22) і (23) випливає оцінка

$$mes(t_2\in[0,T]: |g_{\nu(n)}(k,t)|\le\|k\|^{-p-\varepsilon_1}) \le (c_4+c_5)\|k\|^{-p-\varepsilon_1}. \quad (24)$$

Інтегруючи оцінку (24) в кубі $[0,T]^{n-1}$ за змінними $t_1,t_3,t_4,\ldots,t_n$, дістанемо

$$mes(t\in[0,T]^n: |g_{\nu(n)}(k,t)|\le\|k\|^{-p-\varepsilon_1}) \le c_6\|k\|^{-p-\varepsilon_1}.$$

Аналогічно, переходячи послідовно від оцінки для $|g_{\nu(n)}(k,t)|$ до оцінки для $|g_{\nu(n)-1}(k,t)|$ і т.д., дістанемо, що для довільного $\varepsilon>0$ існують додатні константи σ і c такі, що оцінка

$$|g_1(k,t)| \le \|k\|^{-n(n-1)p/2-\varepsilon} \quad (25)$$

виконується для підмножини векторів $t\in[0,T]^n$, міра якої не перевищує $c\|k\|^{-p-\sigma}$; при цьому враховується той факт, що число інтервалів зміни компоненти $t_s\in[0,T]$, $s=\overline{3,n}$, на яких виконується нерівність $|Re\ \partial g_r(k,t)/\partial t_s|>l(k)$, або

$$|Im\ \partial g_r(k,t)/\partial t_s|>l(k), \qquad r=\overline{1,\nu(n)-1},$$

не перевищує $const\|k\|$. На підставі леми 2 та збіжності ряду $\sum\limits_{\|k\|>0}\|k\|^{-p-\sigma}$ отримуємо, що майже для всіх $t\in[0,T]^n$

оцінка

$$|\Delta(k)| = |g_1(k,t)| > \|k\|^{-\nu(n)p-1} \qquad (26)$$

виконується для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in Z^2$.

Покажемо справедливість використаного вище факту про число інтервалів зміни компонент t_s ($s=3,n$), наприклад, у випадку $s=n$ та $1\le r\le n-1$; для інших випадків доведення аналогічне. Розглянемо функції $g_r(k,t)$, визначені формулами (15). Очевидно,

$$\partial g_r(k,t)/\partial t_n = i\|k\| \sum_{j=r+1}^{n} \prod_{s=1}^{r} (\lambda_j-\lambda_s)A_{nj} exp(i(\gamma_j-\gamma_r)t_n);$$

$$Re\ \partial g_r(k,t)/\partial t_n = -\|k\| \sum_{j=r+1}^{n} \prod_{s=1}^{r} (\lambda_j-\lambda_s)(Re\ A_{nj} sin((\gamma_j-\gamma_r)t_n)+$$

$$+Im\ A_{nj}\ cos((\gamma_j-\gamma_r)t_n)).$$

На кожному з інтервалів (крім, можливо, двох крайніх) зміни величини $t_n \in [0,T]$, на яких справджується нерівність $|Re\ \partial g_1(k,t)/\partial t_n| > l(k)$ функція $Re\ \partial^2 g_r(k,t)/\partial t_n^2 \equiv y(\|k\| t_n) \equiv \equiv \tilde{y}_k(z)$ має за теоремою Ролля принаймі один нуль. Зауважимо, що $\tilde{y}_k(z)$ є розв'язком такого рівняння

$$\prod_{j=r+1} \left[\frac{d^2}{dz^2} + (\lambda_j-\lambda_r)^2\right] y(z) = 0\ . \qquad (27)$$

Розглянемо тепер рівняння

$$\prod_{j=r+1} \left[\frac{d^2}{dz^2} + q_{jr}^2\right] y(z) = 0\ , \qquad (28)$$

де q_{jr}- додатні константи, такі, що $|\lambda_j-\lambda_r|\le q_{jr}$.

Згідно з теоремою Вале Пусена [8], існує таке $h_r>0$, що будь-який нетривіальний розв'язок рівняння (28), а, отже, і рівняння (27) має на інтервалі довжини h_r не більше, ніж

$(2n-2r-1)$ нулів. Тому число нулів функції $\operatorname{Re}\,\partial^2 g_r(k,t)/\partial t_n^2$ як функції аргумента t_n на інтервалі $[0,T]$ не перевищує $T\|k\|(2n-2r-1)/h_r$. Звідси стає очевидним твердження про те, що число інтервалів зміни компоненти $t_n \in [0,T]$, на яких виконується нерівність $|\operatorname{Re}\,\partial g_r(k,t)/\partial t_n| > l(k)$, не перевищує $const\,\|k\|$. Аналогічно доводимо і для нерівності $|\operatorname{Im}\,\partial g_r(k,t)/\partial t_n| > l(k)$. Теорема 4 доведена.

Із теореми 4 випливає, що якщо рівняння (1) строго гіперболічне, то нерівності (12) виконуються при $\nu > n(n-1)p/2$ для майже всіх (щодо міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $(t_1,\ldots,t_n) \in [0,T]^n$ і для довільних фіксованих коефіцієнтів рівняння (1).

2. Розглянемо питання про стійкість задачі (1),(2), наклавши додатково на її розв'язок природну умову обмеженості енергії

$$\int_{\Omega_p}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial u}{\partial x_p}\right)^2\right)dx < E\,. \qquad (29)$$

Означення. Задача (1).(2),(29) називається стійкою, якщо для довільних розв'язків u_1 і u_2 із $H_q^n(D_p)$, $q\ge n$ рівняння (1), які задовольняють умову (29) і умови

$$\|u(\tau_j,x)-\phi_j(x)\|_{L_2(\Omega_p)} \le C\delta\,, \quad |\tau_j-t_j|\le\delta\,,\ j=\overline{1,n}\,, \qquad (30)$$

маємо $\lim\limits_{\delta\to 0}\max\limits_{0\le t\le T}\|u_1-u_2\|_{L_2(\Omega_p)}=0 \ \ \forall E>0\,,\ \ \phi_j(x)\in L_2(\Omega_p)$.

Теорема 5. Задача (1),(2),(29) є стійкою тоді і тільки тоді, коли виконується умова (10).

Доведення. Функція $u=u_1-u_2$, де u_1 і u_2 - розв'язки задачі (1),(2).(30), подамо у вигляді

$$u(t,x)=a_0(t)+\sum_{\|k\|>0}\sum_{\gamma=1}^{n}A_{\gamma k}\sum_{j=1}^{n}\frac{\Delta_{\gamma j}(k)}{\Delta(k)}\times$$

$$\times\exp(i((k,x)+\lambda_j(k)\|k\|t)), \qquad (31)$$

де $A_{\gamma k}$- деякі константи, $a_0(t)$ - многочлен степеня не вище $(n-1)$. Позначимо $a_0(t_\gamma)=A_{\gamma 0}$, $\gamma=\overline{1,n}$. Оскільки $u(t_j,x)=\sum_{\|k\|>0}A_{\gamma k}\exp(ik,x)$, $\gamma=\overline{1,n}$, то на основі (30) отримаємо, що

$$\|u(t_\gamma,x)\|_{L_2(\Omega_p)}=\left(\sum_{\|k\|>0}|A_{\gamma k}|^2\right)^{1/2}<c_1\delta,\ \gamma=\overline{1,n}. (32)$$

Зобразимо тепер $u(t,x)$ у вигляді $u(t,x)=a_0(t)+\sum_{0<\|k\|<N}\sum_{\gamma=1}^{n}A_{\gamma k}\times$

$$\times\sum_{j=1}^{n}\frac{\Delta_{\gamma j}(k)}{\Delta(k)}\exp(i((k,x)+\lambda_j(k)t))+\sum_{\|k\|\geq N+1}\sum_{\gamma=1}^{n}A_{\gamma k}\times$$

$$\times\Delta_{\gamma j}(k)\Delta^{-1}(k)\exp(i((k,x)+\lambda_j(k)t))=v_N+w_N,$$

де $v_N=a_0(t)+\sum_{0<\|k\|\leq N}\sum_{\gamma,j=1}^{n}A_{jk}\frac{\Delta_{\gamma j}(k)}{\Delta(k)}\exp(i((k,x)+\lambda_j(k)t))$,

$$w_N=\sum_{\|k\|\geq N+1}\sum_{\gamma,j=1}A_{\gamma k}\frac{\Delta_{\gamma j}(k)}{\Delta(k)}\exp(i((k,x)+\lambda_j(k)t)).$$

Використовуючи (29), оцінимо доданок w_N.

$$N^2\|w_N\|^2_{L_2(\Omega_p)}\leq\sum_{\|k\|\geq N+1}\|k\|^2\left|\sum_{\gamma,j=1}^{n}A_{\gamma k}\frac{\Delta_{\gamma j}(k)}{\Delta(k)}\exp(i\lambda_j(k)t)\right|^2\leq$$

$$\leq c_2\int_{\Omega_p}\left[\left(\frac{\partial w_N}{\partial x_1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial w_N}{\partial x_p}\right)^2\right]dx<c_2E;$$

отже, $\|w_N\|^2_{L_2(\Omega_p)}\leq c_2E/N^2$.

Враховуючи (32), для доданка v_N дістанемо оцінку

$$\|v_N\|^2_{L_2(\Omega_p)}\leq c_3\left(\max_{\|k\|\leq N}\ \max_{\gamma,j=\overline{1,n}}\left|\frac{\Delta_{\gamma j}(k)}{\Delta(k)}\right|^2+1\right)\delta^2.$$

Тоді

$$\|u(t,x)\|^2_{L_2(\Omega_p)} \le c\left[\frac{E}{N^2} + \left(\max_{\|k\|\le N}\ \max_{\gamma,\, j=\overline{1,n}} \left|\frac{\Delta_{\gamma j}(k)}{\Delta(k)}\right|^2 + 1\right]\delta^2\right] \quad (33)$$

Побудуємо тепер монотонну зростаючу разом із своєю похідною функцію $g(z)$ таку, що

$$g(N) > \max_{\|k\|\le N}\ \max_{\gamma,\, j=\overline{1,n}} \left|\frac{\Delta_{\gamma j}(k)}{\Delta(k)}\right|^2$$

і для натуральних значень z

$$\lim_{z\to\infty} \frac{g(z)}{g'(z)z^3} = 0 .$$

Із (33) отримуємо, що $\|u(t,x)\|^2_{L_2(\Omega_p)} \le c\left[\delta^2 g(z)+E/z^2\right]$, де $z\ge 1$, і, отже, $\|u(t,x)\|^2_{L_2(\Omega_p)} \le c\left[\delta^2 g(\bar z)+E/\bar z^2\right]$, де $\bar z$ - корінь рівняння $\delta^2 g'(z)z^3 = 2E$, тобто точка мінімуму функції $\delta^2 g(z)+E/z^2$. Внаслідок монотонності функції $g'(z)$, дістанемо, що $\bar z \xrightarrow[\delta\to 0]{} \infty$, тобто $E/\bar z^2 \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$, а внаслідок умови (34)

$$\delta^2 g(\bar z) = \frac{\delta^2 \bar z^3 g'(\bar z) g(z)}{g'(\bar z)\bar z^3} = \frac{2E\ g(\bar z)}{g'(\bar z)\bar z^3} \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0 .$$

Отже, $\lim\limits_{\delta\to 0} \|u(t,x)\|_{L_2(\Omega_p)} = 0$.

Нехай тепер $\Delta(k^0)\ne 0$ для деякого $k^0\ne(0)$ і нехай $\phi_j(x)\equiv 0$, $j=1,n$. Тоді разом із розв'язком $v_1(t,x)\equiv 0$ задача (1),(29),(30) буде мати також розв'язок

$$v_2(t,x) = \varepsilon \sum_{j=1}^{n} c_j \exp(i((k^0,x)+\lambda_j(k^0)t)),$$

де c_j, $j=\overline{1,n}$ - нетривіальний розв'язок системи (9) при $k=k^0$ і $\phi_{\gamma k}=0$, $\gamma=\overline{1,n}$, а $\varepsilon=\varepsilon(E,c)$ вибране так, що виконуються умови (29),(30). Очевидно, що v_2-v_1 не залежить від δ , тому $\|v_2-v_1\|_{L_2(\Omega_p)}$ не прямує до нуля при $\delta\to 0$.Теорема доведена.

3. Припустимо, що задача (1),(2),(29) є стійка, та дослідимо питання про її регуляризацію і побудову наближеного розв'язку. Побудуємо регуляризуючу сім'ю операторів цієї задачі (див.[9]). Позначимо $\phi = col(\phi_1,\dots,\phi_N)$ і розглянемо сім'ю лінійних операторів B_N, що залежать від цілочислового параметра N, які означаються так (див. формулу (11)):

$$B_N\phi(x) = u_0(t) +$$

$$+ \sum_{0\le\|k\|\le N} \sum_{j,\gamma=1} \frac{\Delta_{\gamma j}(k)\phi_{\gamma k} exp(i((k,x)+\lambda_j(k)\|k\|t))}{\Delta(k)} \quad (35)$$

Теорема 6. Сім'я операторів B_N: $L_2(\Omega_p)\rightarrow L_2(D_p)$ є регуляризуючою сім'єю стосовно до задачі (1),(2),(29).

Доведення. Оператори знаходження коефіцієнтів Фур'є функцій $\phi_\gamma(x)$ та скінченного підсумування є неперервні, звідки випливає неперервність операторів B_N. Збіжність послідовності $B_N\phi(x)$ до розв'язку $u(t,x)$ задачі (1),(2),(29) випливає із зображення розв'язку рядом (11) та зі збіжності цього ряду в нормі простору $L_2(D_p)$. Теорема доведена.

Якщо відома регуляризуюча сім'я операторів B_N для рівняння $Au = f$ ($u \in V$, $f \in F$), то, як показано в [10], за наближений розв'язок цього рівняння можна взяти значення оператора B_N на елементі f_δ, такому, що $\|f-f_\delta\|_F \le \delta$, із значенням параметра N, узгодженим із оцінкою похибки δ. Розв'язок задачі (1),(29),(30) з наближеними даними зображається у вигляді

$$u_\tau(t,x) = u_0(t) +$$

$$+ \sum_{\|k\|>0} \sum_{j,\gamma=1}^{n} \frac{\Delta_{\gamma j}(k,\tau)\tilde{\phi}_{\gamma k} \exp(i((k,x)+\lambda_j(k)\|k\|t))}{\Delta(k,\tau)}, \quad (36)$$

де $\tau=(\tau_1,\dots,\tau_n)$, а величини $\tilde{\phi}_{\gamma k}$ такі, що

$$(2\pi)^p \sum_{\|k\|>0} |\tilde{\phi}_{\gamma k}-\phi_{\gamma k}|^2 \le \delta^2, \quad \gamma=1,n . \qquad (37)$$

Виберемо $\tilde{\phi}_{\gamma k}$ так, щоб справджувались нерівності

$$\big||\tilde{\phi}_{\gamma k}|-|\phi_{\gamma k}|\big| \le |\tilde{\phi}_{\gamma k}-\phi_{\gamma k}| \le \delta\sqrt{(2\pi)^p B}\,(1+\|k\|^p)^{-1},$$

де $B=\sum_{\|k\|\ge 0} (1+\|k\|)^{-2\beta}, \quad \beta > p/2$.

Очевидно, що так вибрані $\tilde{\phi}_{\gamma k}$ задовольняють умови (30) і, таким чином, (35) дає розв'язок задачі (1),(29),(30). Виходячи з (35), запишемо наближений розв'язок задачі (1),(2),(29) у вигляді

$$u_{N,\tau}(t,x) = u_0(t) + \sum_{0<\|k\|\le N} \sum_{j,\gamma=1} \Delta_{\gamma j}(k,\tau)\tilde{\phi}_{\gamma k} \exp\big(i((k,x) +$$

$$+\lambda_j(k)\|k\|t)\big)/\Delta(k,\tau) . \qquad (38)$$

Проведемо оцінку відхилення суми (38) від точного розв'язку задачі (1),(2),(29) у просторі $L_2(D_p)$, тобто оцінимо функцію

$$\Phi(N(\delta)) = \|u(t,x)-u_{N,\tau}(t,x)\|_{L_2(D_p)} .$$

Щоб елемент $u_{N,\tau}(t,x)$ можна було прийняти за наближений розв'язок задачі (1),(2),(29) треба, щоб $\lim_{\delta\to 0} \Phi(N(\delta))=0$.

Позначимо $\qquad \Phi_1(N(\delta)) = \|u(t,x)-B_N\phi(x)\|_{L_2(D_p)}$

і $\qquad \Phi_2(N(\delta)) = \|B_N\phi(x)-u_{N,\tau}(t,x)\|_{L_2(D_p)}$.

Тоді $\qquad \Phi(N(\delta)) \le \Phi_1(N(\delta)) + \Phi_2(N(\delta))$.

Оцінимо $\Phi_1(N(\delta))$, використавши нерівність

$$(2\pi)^p \sum_{\|k\|\ge 0} \|k\|^2 |u_k(t)|^2 dt \le E \qquad \forall t \in (0,T) ,$$

яка є наслідком умови (29). З останньої нерівності випливає, що

$$(2\pi)^p \sum_{\|k\|\ge N+1} (N+1)^p \int_0^T |u_k(t)|^2 dt \le ET .$$

Отже, отримуємо оцінку

$$\Phi_1^2(N)=(2\pi)^p \sum_{\|k\|\ge N+1} \int_0^T |u_k(t)|^2 dt \le ET/(N+1)^2 .$$

З нескладних підрахунків можемо переконатись, що $\Phi_1^2(N)$ досягає найбільшого значення у випадку, коли $\phi_{\gamma k}=0$, $k \ne \bar{k} =(N+1,0,\dots,0)$

$$\phi_{\gamma k}=\frac{(-1)^{j+\gamma}}{N+1} \sqrt{\frac{ET}{(2\pi)^p}} \frac{\Delta(\bar{k},\bar{t})}{\Delta_{\gamma j}(\bar{k},\bar{t})} \left[\frac{n(n+1)}{2} \int_0^T \left| \sum_{q=1}^n exp(i\lambda_q(\bar{k}) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \|k\| t) \right|^2 dt\right]^{-1}$$

для будь-якого j $(j=\overline{1,n})$.

Функцію $\Phi_2(N(\delta))$ будуємо, використовуючи зображення (35) і (38) .

$$\Phi_2^2(N(\delta))=(2\pi)^p \sum_{0<\|k\|\le N} \int_0^T \left| \sum_{j,\gamma=1}^n (-1)^{j+\gamma} \left(\Delta_{\gamma j}(k,\bar{t})\Delta(k,\tau)\phi_{\gamma k} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \Delta_{\gamma j}(k,\tau)\Delta(k,\bar{t})\tilde{\phi}_{\gamma k}\right) exp\left(i\lambda_j(k)\|k\| t\right)/\left(\Delta(k,\bar{t})\Delta(k,\tau)\right) \right|^2 dt .$$

Оскільки можемо покласти $\tau_j=t_j+\delta$, $\tilde{\phi}_{\gamma k}=\bar{\phi}_{\gamma k}+\nu_1(k)$, $\nu_1(k)=\delta \times \times\left(\sqrt{(2\pi)^p B}\left(1+\|k\|^\beta\right)\right)^{-1}$, $\Phi_2^2(N(\delta))$ не перевищує величини

$$(2\pi)^p T \sum_{0<\|k\|\le N} \sum_{j,\gamma=1}^n \left| \frac{\Delta_{\gamma j}(k,\bar{t})}{\Delta(k,\bar{t})} \right|^2 \left| \left(e^{i\lambda_j(k)\|k\|\delta} -1\right)\phi_{\gamma k}-\nu_1(k) \right|^2 .$$

Викладені результати підсумовує наступна теорема.

<u>Теорема 7.</u> Нехай виконана умова (10). Тоді справедлива

така оцінка

$$\|u(t,x)-u_{N,\tau}(t,x)\|^2_{L_2(D_p)} \le \frac{ET}{(N+1)^2}$$

$$+ (2\pi)^p\, T \sum_{0<\|k\|\le N} \sum_{j,\gamma=1}^{n} |\Delta_{\gamma j}(k,t)|^2 |\Delta(k,\bar{t})|^{-2} \times$$

$$\times \left| (e^{i\lambda_j(k)\|k\|\delta} - 1)\phi_{\gamma k} - \nu_1(k) \right|^2, \qquad (39)$$

де $u(t,x)$ - точний розв'язок задачі (1),(2),(29), а $u_{N,\tau}$ - її наближений розв'язок, визначений формулою (38).

Ефективність регуляризації значно залежить від вибору параметра регуляризації $N(\delta)$. При фіксованій точності δ наближених даних значення параметра $N(\delta)$, при якому досягається

$$\inf_{N(\delta)} (\Phi_1(N(\delta)) + \Phi_2(N(\delta)))$$

буде оптимальним щодо оцінки (39).

П р и к л а д. В області $D=\{t,x: 0<t<2a\pi,\ x\in\Omega_1\}$ розглянемо двоточкову задачу $t_1=0$, $t_2=2a\pi$ для рівняння $u_{tt}-u_{xx}=0$ з умовою обмеженості енергії струни. Її точний розв'язок зображається формулою

$$u(x,t)=\phi_{10} + (\phi_{20}-\phi_{10})t/(2a\pi) + \sum_{|k|>0} \big(\phi_{1k}\sin(k(2a\pi-t)) +$$

$$\phi_{2k}\sin kt\big)\exp(ikx)/\sin 2ka\pi,$$

а наближений розв'язок має вигляд $u_{N,\tau}(t,x)=\phi_{10}+$

$$(\phi_{20}-\phi_{10})/(2a\pi) + \sum_{0<|k|\le N} \big(\tilde{\phi}_{1k}\sin k(2\tau\pi-t)+\tilde{\phi}_{2k}\sin kt\big) \times$$

$$\times \exp(ikx)/\sin 2k\tau\pi,$$

де $\tau\in[a-\delta,a]$, $\tilde{\phi}_{jk}=\phi_{jk}+\delta/(\sqrt{2\pi B_1}|k|^{\beta})$, $j=\overline{1,2}$, $\beta>1/2$, $B_1=\sum_{|k|>0}|k|^{-2\beta}$; $N=N(a,\delta)$ - параметр регуляризації.

Критерієм стійкості задачі, що розглядаємо (як і задачі Діріхле для рівняння коливань струни в області D [11]), є ірраціональність числа α.

Ефективність даної регуляризації випливає з оцінки

$$\|u(t,x)-u_{N,\tau}(t,x)\|_{L_2(\Omega)} \le \frac{\sqrt{E}}{N+1}\left[\alpha\pi - \frac{1}{4(N+1)}\sin 4(N+1)\alpha\pi\right]^{1/2} + $$

$$+ \left\{\frac{3\pi}{2}\sum_{0<|k|\le N}\frac{(\delta k\pi)^2\left(\alpha\pi - \sin(4k\alpha\pi)/(8k)\right)\left(|\phi_k|^2+|\psi_k|^2\right)}{\sin 2k\alpha\pi\,\sin 2k\tau\pi} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\delta^2}{\pi B|k|^{2\beta}}\left(\left[\alpha\pi + \frac{\sin 4k\alpha\pi}{8k}\right] + 4\,\frac{\sin^4 k\tau\pi}{\sin^2 2k\tau\pi}\left(\alpha\pi - \frac{1}{8k}\sin 4k\alpha\pi\right)\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

Якщо, наприклад, $\delta=10^{-3}$, $\alpha=\sqrt{3}$; $\tau = \frac{71}{41}$ - це число з найменшим можливим знаменником таке, що $\tau \in [\alpha-\delta, \alpha]$, то за параметр регуляризації можна взяти будь-яке натуральне число, менше від 41.

Список літератури

1. Берник В.И., Пташник Б.И., Сальга Б.О. Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами //Дифференц. уравнения.- 1977.- Т. 13, N°4.- С. 637-645.
2. Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными.- Киев: Наук.думка, 1984.- 264 с.
3. Штабалюк П.И. Оценка снизу определителя, связанного с многоточечной задачей для гиперболического уравнения //Материалы IX-ой конференции молодых ученых Института прикладных проблем механики и математики АН УССР.- Львов,1982.- Ч.2.- С. 170-174.- Деп. в ВИНИТИ 10.01.84, N°324-84.

4. Фіголь В.В. Крайова задача з наближеними граничними даними для гіперболічного рівняння зі сталими коефіцієнтами //Доп. АН УРСР. Сер.А.- 1985.- N°2.- С.18-21.
5. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.- Киев: Наук.думка, 1984.- 283 с.
6. Илькив В.С.,Пташник Б.И. Задача с нелокальными краевыми условиями для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами //Дифференц.уравнения.- 1984.- Т.20, N°6.- С.1012-1023.
7. Спринджук В.Г. Метрическая теория диофантовых приближений.- М.: Наука, 1977.- 144 с.
8. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения: В 2 т.- М.: Изд-во иностр. лит., 1953.- Т.1.- 346 с.
9. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения.- М.: Наука, 1978.- 206 с.
10. Лаврентьев М.М. Условно-корректные задачи для дифференциальных уравнений.- Новосибирск, 1973.- 71 с.
11. Pari F.G. On the stability of the Dirichlet problem for the vibrating string equation //Ann. Scuola norm. super., Pisa. cl. sci.- Vol.6, N°4.- P.719-728.