УДК 517.5

М. І. НАГНИБІДА, В. І. ТРУСЕНКО

Чернівецький університет

ПРО ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ СКЛАДОВИХ ОПЕРАТОРІВ ДО ОПЕРАТОРА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

Нехай A_R $(0<R\le\infty)$ - простір усіх однозначних і аналітичних у крузі $|z|<R$ функцій з топологією компактної збіжності, а $D=d/dz$ - оператор звичайного дифференціювання в ньому. Розглянемо ще оператор P : $(Pf)(z) = f(-z)$ $(\forall f \in A_R)$ і покладемо

$$L = \alpha(D) + \beta(D)P, \tag{1}$$

де $\alpha(\lambda)$ і $\beta(\lambda)$ - фіксовані цілі функції класу [1,0] відповідно при $R<\infty$. При зроблених припущеннях оператор L вказаного вигляду є лінійним неперервним відображенням простору A_R в себе, який комутує в ньому з оператором D^2 (див. [1]).

Більше того, операторами вигляду (1) (у [2] їх названо складовими) вичерпується вся множина лінійних неперервних операторів, перест авних з D^2, матриці яких у степеневому базисі $(z^n)_{n=0}^{\infty}$ простору A_R є верхньотрикутними.

Мета цієї роботи - знайти умови, за яких існує такий ізоморфізм T простору A_R на себе, що $TL = DT$ (цей факт будемо позначати так: $L \sim D$).

1. Спочатку відшукаемо деякі необхідні умови еквівалентності L і D. Для цього скористаемось співвідношенням

$$L\,L_1 = L_1 L = \delta(D), \qquad (2)$$

де L - заданий оператор вигляду (1), $L_1 = \alpha(-D) - \beta(D)P$ - союзний з ним оператор і

$$\delta(D) = \alpha(D)\alpha(-D) - \beta(D)\beta(-D)$$

- резольвентний оператор (стосовно L). Зауважимо, що характеристична функція

$$\delta(\lambda) = \alpha(\lambda)\alpha(-\lambda) - \beta(\lambda)\beta(-\lambda)$$

резольвентного оператора також є цілою і належить класові $[1,\infty)$ при $R=\infty$. Крім того, $\delta(\lambda)$ - парна функція.

Оскільки оператор D має в просторі $\mathbb{A}_R$ лише один нетривіальний нуль, то у випадку еквівалентності L і D стільки ж нулів повинен мати і оператор L. Тому спочатку розглянемо питання про розмірність ядра цього оператора, враховуючи при цьому (див.(2)), що всі нулі містяться в множині нулів оператора $\delta(D)$.

<u>Зауваження</u>. Якщо $\delta(\lambda) \neq 0$ у площині $\mathbb{C}$, то (оскільки $\delta(\lambda)$ є цілою функцією, не вищою від першого порядку) $\delta(\lambda) = c\,\exp(a\lambda)$ ($c \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$) і, з урахуванням парності, $\delta(\lambda) \equiv const \neq 0$. У цьому випадку (див. [1]) оператор L є ізоморфізмом простору $\mathbb{A}_R$ на себе і бути еквівалентним до D він не може.

Тому, якщо оператори L і D еквівалентні в $\mathbb{A}_R$, то ціла парна функція $\delta(\lambda)$ обов'язково повинна мати в $\mathbb{C}$ нулі.

<u>Лема 1</u>. Нехай λ_0 - нуль функції $\delta(\lambda)$. Тоді він породжує хоча б один нетривіальний нуль оператора L вигляду

$$\phi(z) = c_1 \exp(\lambda_0 z) + c_2 \exp(-\lambda_0 z) \qquad \text{при } \lambda_0 \neq 0$$

або вигляду

$$\phi(z) = c_1 + c_2 z \qquad \text{при } \lambda_0=0.$$

Це твердження дістається безпосередньо з урахуванням рівностей $\delta(\lambda_0)=\delta(-\lambda_0)=0$ при $\lambda_0\neq0$.

Лема 2. Якщо λ_1 і λ_2 - нулі функції $\delta(\lambda)$ і $\lambda_1^2\neq\lambda_2^2$, то відповідні їм нулі оператора L є лінійно незалежними.

Враховуючи наведені твердження, теорему Адамара (див.[3]) для функцій експоненціального типу і парність $\delta(\lambda)$, приходимо до висновку, що справедлива наступна теорема.

Теорема 1. Якщо оператори L і D еквівалентні в просторі A_R, то функція $\delta(\lambda)$ є многочленом другого степеня, тобто $\delta''(0)\neq0$ і $\delta^{(n)}(0)=0$ при $n\geq3$.

Доведення тут потребує тільки те, що $\delta(\lambda)$ - многочлен точно другого степеня, тобто $\delta(\lambda)=a + b\lambda^2$ ($a,b \in \mathbb{C}$, $b\neq0$). Для цього розглянемо такі можливі ситуації.

а) Нехай $\delta(\lambda)\equiv a$ ($a\neq0$). Тоді функція $\delta(\lambda)$ не має нулів. Згідно зі зробленим раніше зауваженням такого бути не може.

б) Нехай тепер $\delta(\lambda)\equiv0$. Тоді довільне число λ_0 є нулем функції $\delta(\lambda)$ і оператор L має нескінченно багато нетривіальних нулів, що неможливо з урахуванням еквівалентності L і D.

Лема 3. Якщо $L \sim D$, то функція $a(\lambda)+a(-\lambda)$ є сталою.

Справедливість цього твердження випливає з того, що коли $L \sim D$, то також $L + \mu E \sim D$, де μ - довільне комплексне число, а E - оператор тотожного перетворення, бо при зроблених припущеннях $L + \mu E \sim D + \mu E$, а $D + \mu E \sim D$ (див. [1]).

Залишається підрахувати функцію $\delta_\mu(\lambda)$ для оператора $L + \mu E$ і скористатися наведеною вище теоремою 1. Тоді для довільного $\mu \in \mathbb{C}$

$$\delta_\mu(\lambda) = \delta(\lambda) + [\alpha(\lambda)+\alpha(-\lambda)] + \mu^2,$$

причому $\delta_\mu(\lambda)$ - многочлен другого степеня. Тому $\alpha(\lambda)+\alpha(-\lambda)$ - многочлен степеня не вище другого.

Якби степінь цього многочлена дорівнював 2, то за рахунок вибору μ з умови $\delta''_\mu(0)=0$ (тобто $\delta''(0)+2\mu\alpha''(0)=0$) можна добитись того, що відповідна функція $\delta_\mu(\lambda)$ буде многочленом степеня нижче двох. А це, як твердиться в теоремі 1, неможливо. Далі, з урахуванням парності функції $\alpha(\lambda)+\alpha(-\lambda)$ дістаємо, що вона є постійною.

Отже, коли $L \sim D$, то необхідно $\alpha(\lambda) = b+\alpha_1(\lambda)$, де $d \in \mathbb{C}$ і $\alpha_1(\lambda)$ - деяка непарна функція.

2. Дослідимо тепер до кінця задачу про відшукання умов еквівалентності оператора $L = bE + \alpha_1(D) + \beta(D)P$ ($b \in \mathbb{C}$, $\alpha_1(-\lambda) = -\alpha_1(\lambda)$) до D у припущенні, що $\beta(\lambda)$ - парна функція. Оскільки на еквівалентність L і D доданок bE не впливає, то в подальшому будемо вважати, що $b=0$.

<u>Лема 4</u>. Якщо $\alpha_1(\lambda)$ - непарна, а $\beta(\lambda)$ - парна функції, то оператори $L = \alpha_1(D) + \beta(D)P$ і $L_0 = [i\alpha_1(D)+\beta(D)]P$ еквівалентні в просторі A_R.

<u>Доведення</u>. Розглянемо оператор $T_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(E+iP)$. Він також має вигляд (1), причому характеристична функція його резольвентного оператора дорівнює одиниці. Значить, T_1 - ізоморфізм простору A_R на себе (при цьому $T_1^{-1}=$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}(E-iP)$). Крім того, $T_1L_0 = LT_1$, що перевіряється безпосередньо. Отже, T_1 є оператором перетворення L_0 в L, а самі оператори L_0 і L еквівалентні в $\mathbb{A}_R$. Лема 4 доведена.

Тепер покладемо $\beta_0(\lambda) = i\alpha_1(\lambda)+\beta(\lambda)$ і знову скористаємося теоремою 1. Тоді якщо $L_0 = \beta_0(D)P \sim D$, то характеристична функція $\delta_0(\lambda) = -\beta_0(\lambda)\beta_0(-\lambda)$ відповідного резольвентного оператора (стосовно L_0) є многочленом другого степеня. Значить, функція $\beta_0(\lambda)$ може мати в $\mathbb{C}$ не більше одного нуля, тобто

$$\beta_0(\lambda) = (\alpha\lambda+\beta)\exp(\sigma\lambda),$$

де α, β, σ - фіксовані комплексні числа.

При $R<\infty$, очевидно, що $\sigma=0$ (бо $\beta_0(\lambda) \in [1,0]$). Якщо ж $\beta_0(\lambda) \in [1,\infty)$ (тобто $R=\infty$), то її тип $|\sigma|$ може не дорівнювати нулю. Але тепер можна зробити так. Розглянемо в просторі $\mathbb{A}_\infty$ всіх цілих функцій оператор T_2 зсуву аргумента на число $\sigma/2$, тобто покладемо

$$(T_2 f)(z) = f(z + \sigma/2) \qquad (\forall f \in \mathbb{A}_\infty).$$

Тоді

$$(T_2^{-1} f)(z) = f(z - \sigma/2)$$

і з урахуванням співвідношення

$$(\exp(\sigma D)\, f)(z) = f(z - \sigma/2) \qquad (\forall fa \in \mathbb{A}_\infty)$$

легко перевіряється, що $L_0T_2 = T_2[(\alpha D + \beta E)\, P]$.

Таким чином, оператор L_0 або збігається з $(\alpha D + \beta E)P$ (при $\sigma=0$), або до нього еквівалентний (при $\sigma\neq0$). В усякому разі, питання про еквівалентність операторів L і D зводиться до аналогічного питання для операторів $(\alpha D + \beta E)P$ і D.

Розглянемо далі окремі випадки $R=\infty$ і $R<\infty$.

а) Отже, нехай $R=\infty$, а оператор $L=(\alpha D+\beta E)P$ еквівалентний у просторі A_∞ до простішого оператора D. Тоді, оскільки $\sigma(\lambda)=-(\alpha\lambda+\beta)(-\alpha\lambda+\beta)$ - многочлен другого степеня, $\alpha\neq 0$ і нам залишається дослідити вказані оператори на еквівалентність за умови $\alpha\neq 0$.

Через $[l_{i,k}]$ і $[d_{i,k}]$ позначимо відповідно матриці операторів L і D у степененвому базисі простору A_∞. Тоді

$$l_{k-1,k}=(-1)^k\alpha k,\qquad k\geq 1,$$

$$l_{k,k}=(-1)^k\beta,\qquad k\geq 0,$$

$$d_{k-1,k}=k,\qquad k\geq 1.$$

Всі решта елементів матриць операторів L і D, очевидно, дорівнюють нулю.

Покажемо тепер, що завжди існує единий лінійний неперервний в A_∞ оператор T з матрицею $[t_{i,k}]$, де $t_{i,k}=0$ при $k>i$ і $t_{k,k}=(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\alpha^k$ $(k\geq 0)$, який задовольняє операторне рівняння $TL=DT$. Справді, співвідношення

$$\sum_{j=0}^{\infty} t_{i,j}\, l_{j,k}=\sum_{j=0}^{\infty} d_{i,j}\, t_{j,k}\qquad (i,\ k\geq 0)$$

(тобто рівність $TL=DT$ у матричній формі) рівносильні тому, що

$$t_{i,k-1}\, l_{k-1,k}+t_{i,k}\, l_{k,k}=d_{i,i+1}\, t_{i+1,k}. \qquad (3)$$

Те, що $t_{i,k}=0$ $(k>i)$ і $t_{k,k}=(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\alpha^k$ $(k\geq 0)$ співвідношенням (3), очевидно, не суперечить.

Тому при $k\leq i+1$ і всіх $i\geq 0$

$$t_{i+1,k}=\frac{1}{d_{i,i+1}}\left(l_{k-1,k}\, t_{i,k-1}+l_{k,k}\, t_{i,k}\right)=$$

$$= \frac{(-1)^k \alpha k}{i+1} t_{i,k-1} + \frac{(-1)^k \beta}{i+1} t_{i,k} \qquad (4)$$

звідки й випливає единість шуканого оператора T.

Для того, щоб переконатись в його неперервності, зафіксуемо довільне ρ, $\rho<+\infty$, і виберемо такі r, $r<+\infty$, і натуральне число i_o, що при всіх $i\geq i_o$ і $k\leq i+1$

$$\nu = \frac{|\alpha|}{i+1} k \frac{\rho}{r} + \frac{|\beta|}{i+1} \rho \leq 1. \qquad (5)$$

Знайдемо далі таку сталу c, $c\geq 0$, що при всіх $i\leq i_o$ і $k\leq i+1$

$$|t_{i+1,k}| \leq c \frac{r^k}{\rho^{i+1}}. \qquad (6)$$

Тоді $\forall k\leq i_o+1$ зі співвідношень (4) та з урахуванням нерівностей (5) і (6) дістаемо, що

$$|t_{i_o+1,k}| \leq \frac{|\alpha|\ k}{i_o+1} c \frac{r^{k-1}}{\rho^{i_o}} + \frac{|\beta|}{i_o+1} c \frac{r^k}{\rho^{i_o}} \leq$$

$$\leq c \frac{r^k}{\rho^{i_o+1}} \left(\frac{|\alpha| k}{i_o+1} \frac{\rho}{r} + \frac{|\beta|}{i_o+1} \rho \right) \leq c \frac{r^k}{\rho^{i_o+1}} \nu \leq c \frac{r^k}{\rho^{i_o+1}}$$

Тому на підставі методу математичної індукції робимо висновок, що $\forall\rho$ $\exists r$ $\exists c$:

$$|t_{i,k}| \leq c \frac{r^k}{\rho^i} \qquad (i,\ k \geq 0),$$

тобто матриця $[\ t_{i,k}]$ визначае лінійний і неперервний у просторі A_∞ оператор T.

Отже, існуе единий неперервний (з нижньотрикутною матрицею $[\ t_{i,k}]$: $t_{i,k}=0$ $(k>i)$ і $t_{k,k}=(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \alpha^k$ $(k\geq 0)$) оператор T, який задовольняе рівняння $TL = DT$. Аналогічно доводиться існування единого лінійного неперервного оператора $T^{(-1)}$ з матрицею $[\ t^{(-1)}_{i,k}]$, що $T^{(-1)}D = LT^{(-1)}$, $t^{(-1)}_{i,k}=0$ $(k>i)$ і $t^{(-1)}_{k,k}=(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \alpha^{-k}$

($k\geq 0$). Із співвідношень $TL = DT$ і $T^{(-1)}D = LT^{(-1)}$ тепер випливає, що $T^{(-1)}TL = LT^{(-1)}T$, тобто що оператор $T^{(-1)}T$ є переставним з L. Аналогічно перевіряється, що $TT^{(-1)}$ комутує з D.

Оскільки матриці операторів T і $T^{(-1)}$ нижньотрикутні (причому $t_{k,k}=(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\alpha^{-k}$), то такими ж є і матриці операторів $TT^{(-1)}$ і $T^{(-1)}T$, а їх діагональні елементи дорівнюють одиниці. Крім того, із співвідношень $TT^{(-1)}D = DTT^{(-1)}$ і $T^{(-1)}TL = LT^{(-1)}T$ їх можна знайти однозначно. Значить, $T^{(-1)}T = TT^{(-1)} = E$ і T - ізоморфізм простору $\mathbb{A}_\infty$ на себе, а $L \sim D$ $\mathbb{A}_\infty$.

<u>Теорема 2</u>. Нехай $L = \alpha(D)+\beta(D)P$, де $\alpha(\lambda),\beta(\lambda) \in [1,\infty)$ і $\beta(\lambda)$ - парна функція. Для того, щоб оператори L і D були еквівалентними в просторі $\mathbb{A}_\infty$, необхідно і досить, щоб:

1) $\dfrac{\alpha(\lambda)+\alpha(-\lambda)}{2} \equiv a \qquad (a \in \mathbb{C})$;

2) $i\,\dfrac{\alpha(\lambda)-\alpha(-\lambda)}{2} + \beta(\lambda) = (a\lambda+b)\exp(\sigma\lambda) \qquad (a,b,\sigma \in \mathbb{C})$;

3) $a \neq 0$.

б) Що ж стосується простору $\mathbb{A}_R$ з $R<\infty$, то зупинимось коротко на питанні про умови еквівалентності в ньому операторів D і $L=(\alpha D+\beta E)P$.

Нехай $L \sim D$. Тоді існує такий ізоморфізм T простору $\mathbb{A}_R$ на себе, що $TL = DT$. Відзначимо, що коли $TL= DT$, то обов'язково $TL^2= D^2T$, тобто L^2 еквівалентний до D^2. Але $L^2= -\alpha^2D^2+\beta^2E$. Доданок β^2E на вказану еквівалентність не впливає, тому можна вважати, що $\beta=0$. Відомо (див.[1]), що в просторі $\mathbb{A}_R$, $R<\infty$, для еквівалентності операторів D^n і aD^n,

$n \in \mathbb{N}$, необхідне виконання умови $|\alpha|=1$. Отже, $|\alpha|=1$.

Далі оператор T перетворення оператора L в D будуєтьоя вже так само, як і в випадку простору A_∞ (виконання умови (5) при $\rho<r<R$ тепер також очевидне).

Отже, справедливе таке твердження.

<u>Теорема 3</u>. Нехай $L = \alpha(D)+\beta(D)P$, де $\alpha(\lambda),\beta(\lambda) \in [1,0]$ і $\beta(\lambda)$ - парна функція. Для того, щоб оператори L і D були еквівалентними в просторі A_R $(R<\infty)$ необхідно і досить, щоб:

1) $\dfrac{\alpha(\lambda)+\alpha(-\lambda)}{2} \equiv a \qquad (a \in \mathbb{C});$

2) $i\ \dfrac{\alpha(\lambda)-\alpha(-\lambda)}{2} + \beta(\lambda) \equiv a\lambda + b \qquad (a, b \in \mathbb{C});$

3) $|\alpha| = 1.$

Дещо складнішу задачу про відшукання умов еквівалентності операторів L і D^2 у випадку протору A_R з $R<\infty$ у роботі [4] розв'язати не вдалося.

Список літератури

1. Фаге М.К., Нагнибида Н.И. Проблема эквивалентности обыкновенных линейных дифференциальных операторов.- Новосибирск: Наука, 1987.- 280 с.
2. Коробейник Ю.Ф. Составные операторные уравнения в обобщенных производных и их приложения к последовательностям Аппеля //Математический сборник - 1977.- Т.102(144), №4.- С.475-498.
3. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций :В 2 т.- М.: Наука, 1968.- Т.2.- 624 с.
4. Нагнибида Н.И. Об эквивалентности составных операторов оператору двукратного дифференцирования //Сиб.мат.журн.- 1991.- Т.32, №2.- С.113-119.